Polynôme du second degré

Ce chapitre sur les polynôme est relativement simple. Il vous aide à manipuler les polynômes du second degré ainsi que les équations du second degré.

www.mathsbook.fr

I - Généralités sur les polynômes

Tout d'abord : Qu'es ce qu'un polynôme ?

Définitions : Un **polynôme** non nul de degré n est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

Avec $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels et $a_n \neq 0$.

On dit que α est **racine** du polynôme P si : $P(\alpha) = 0$.

Si on remplace l'inconnue d'un polynôme par sa racine, on annule ce polynôme.

Exemple : Le polynôme $x^3 + x^2 - 2$ et un polynôme de degré 3 ayant pour racine 1 car :

$$1^3 + 1^2 - 2 = 0$$

Les définitions maintenant posées, je vais vous donner un premier théorème sur les polynômes.

Théorème : Soit P un polynôme non nul de degré n et α un réel.
Si α est racine du polynôme P, alors il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$$

Si on a α une racine d'un polynôme, c'est qu'on peut le factoriser par $(x - \alpha)$, voilà ce que cela veut dire.

II - Polynôme du second degré

1 - Définition

D'abord une définition.

Définition : On appelle **polynôme du second degré** la fonction : $(a \neq 0)$

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

2 - Forme canonique

Je vais vous montrer comment trouver la **forme canonique** de cette expression. Suivez bien mon raisonnement, il est important que vous le compreniez.

On part du polynôme P :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

On factorise ce polynôme par a.
Par a ? Mais il n'est pas en facteur partout ! Comment je fais ?
Là où le a n'est pas en facteur apparant, vous diviserez par a tout simplement. Regardez :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

Vous voyez bien qu'en développant on retombe sur l'expression du départ.
Continuons. On ne va se préoccuper que de la partie $x^2+\frac{b}{a}x$ en factorisant à l'aide d'une identité remarquable $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ comme ceci :

$$x^2+\frac{b}{a}x = (x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

On doit enlever $\frac{b^2}{4a^2}$ car :

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$$

Et nous nous ne voulons que $x^2+\frac{b}{a}x$. Donc la meilleure des choses à faire, c'est d'enlever $\frac{b^2}{4a^2}$.
Ce qui nous donne :

$$P(x) = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}]$$

Mettons sous le même dénominateur les deux dernière fractions.

$$P(x) = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}] = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$$

On note Δ la quantité b^2-4ac,

$$\Delta = b^2-4ac$$

Et on a fini :

$$P(x) = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}] = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

Résumons tout ça.

Propriété : Soit $P(x) = ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré avec $a \neq 0$.
On appelle **forme canonique** de P :

$$P(x) = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

Avec Δ le **discriminant** de P :

$$\Delta = b^2-4ac$$

Exemple : Soit le polynôme $P(x) = x^2+2x-1$. Donner sa forme canonique.
On a donc ici : $a = 1$, $b = 2$ et $c = -1$. On applique tout bêtement la formule :
On a : $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-1) = 8$
Calculons donc la forme canonique.
$P(x) = x^2+2x-1$
$P(x) = 1[(x+\frac{2}{2\times 1})^2 - \frac{8}{4\times 1^2}$
$P(x) = (x+1)^2-2$
On a terminé.

Bien évidemment, on pourrez vous demandez de refaire le raisonnement précédent.

3 - Equations du second degré

Les polynômes peuvent être présent dans des équations.

Théorème : Soit l'équation $ax^2+bx+c = 0$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant de ax^2+bx+c.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

A quoi va nous servir ce discriminant ?
Le discriminant vous servira pour déterminer les **racines** d'un polynôme du second degré. Un fois que vous les avez trouvé, vous pourrez donc factoriser ce polynôme par $(x-\alpha_n)$, avec α_n les racines trouvées. Vous pourrez alors résoudre l'équation.

Appliquons ce théorème sur un exemple pour mieux comprendre de quoi il s'agit.

Exemple : On vous demande de résoudre l'équation suivante :

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5 > 0$$

Donc le polynôme $x^2 - 3x + 1$ a deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2 \times 1} \\ x_2 &= \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2 \times 1} \end{aligned}$$

La valeur de $\sqrt{5}$ n'est pas exact, on laisse donc la racine telle quelle. Par contre, on calcule le reste :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Donc l'équation a deux solutions : x_1 et x_2.

Remarque : Comme je l'ai dit plus haut, les racines trouvées grâce au discriminant peuvent nous aider à factoriser un polynôme.
Si on nous avait demander de factoriser le polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 1$, on aurait eut :

$$P(x) = x^2 - 3x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2})(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})$$

La formule exacte serait :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Parfois même, on peut réussir à trouver les racines dites **évidente** d'un coup d'oeil (uniquement si elles sont très simple, comme 1 ou 0 par exemple).

Exemple : Les racines de $P(x) = x^2 + x - 2$ sont 1 et -2 car :
$P(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$
$P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$
Donc, on peut factoriser facilement P : $P(x) = (x - 1)(x + 2)$.

4 - Signe d'un polynôme du second degré

Oui. Le discriminant va également nous permettre de déterminer le signe d'une polynôme du second degré.

Théorème : Soit l'équation $P(x)ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta \leqslant 0$, alors $P(x)$ est du signe de a.

- Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2. On suppose que $x_1 < x_2$.
  Si $x \in]-\infty; x_1[U]x_2; +\infty[$, alors $P(x)$ est du signe de a,
  Si $x \in]x_1; x_2[$, alors $P(x)$ est du signe de $-a$,

En gros : si x est dans l'intervalle entre les racines, alors le polynôme est du signe de $-a$, sinon il est du signe de a.

Exemple : Déterminer le signe de $P(x) = 2x^2 + x - 2$.
Première chose à faire toujours : calculer le discriminant.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 1 + 16 = 17 > 0$$

Deux racines donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x_2 &= \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

Donc :

$P(x) > 0$ (car $a = 2 > 0$) si $x \in]-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}[U]\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; +\infty[$,

$P(x) < 0$ (car $-a = -2 < 0$) si $x \in]\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}[$.