Corrigé du baccalauréat ES Asie 16 juin 2015

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}$ (10 ; 0,5) et on cherche $p(X=5)$:

$$p(X=5)=\binom{10}{5}\times 0,5^5\times(1-0,5)^{10-5}\approx 0,25$$

Question 1 : Réponse c)

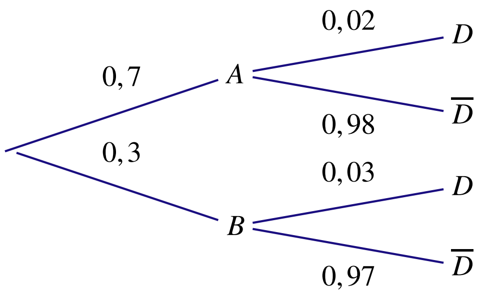
2. $p(X \geqslant 5)=0,5-p(3 \leqslant X \leqslant 5)\approx 0,16$

Question 2 : Réponse b)

3. L'intervalle de confiance est donné par $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et son amplitude est :
$f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\left(f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
On désire que cette amplitude soit inférieure ou égale à $0,04$:
$\dfrac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0,04$ soit $\dfrac{\sqrt{n}}{2}\geqslant 25$, soit $\sqrt{n}\geqslant 50$, soit $n\geqslant 2\,500$

Question 3 : Réponse d)

4. On peut faire un arbre pour représenter la situation :



D est l'événement « la pièce a un défaut ».

A et B forment une partition de l'ensemble des parquets, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$p(D)=p(D\cap A)+p(D\cap\overline{D})=0,7\times 0,98+0,3\times 0,97\approx 0,977$.

Question 4 : Réponse d)

5. Le cœfficient multiplicateur sur ces 7 années est : $\dfrac{0,1372}{0,1140}=\dfrac{343}{285}$.
Soit k le cœfficient multiplicateur moyen annuel, le cœfficient multiplicateur associé à l'augmentation sur les 7 années est k^7 :

$$\begin{aligned}
k^7 &= \frac{343}{285}\\
7\ln k &= \ln\left(\frac{343}{285}\right)\\
\ln k &= \frac{\ln\left(\frac{343}{285}\right)}{7}\\
k &= \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{343}{285}\right)}{7}}
\end{aligned}$$

Si t est le taux d'évolution en pourcentage annuel, alors on a $k = 1 + \dfrac{t}{100}$. D'où :

$t = \left(e^{\frac{\ln\left(\frac{343}{285}\right)}{7}} - 1\right) \times 100$ soit $t \approx 2,68$

Le taux moyen annuel d'augmentation est d'environ 2,68 %.

Question 5 : Réponse c)

Exercice 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Partie A

1. a) On fait « tourner » l'algorithme (les valeurs sont arrondies au centime près) :

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de C	1900	1913	1926,26	1939,79	1953,58	1967,65	1982,01	1996,65	2011,58

   b) Le résultat affiché par l'algorithme est $N = 8$. Ce qui signifie que c'est à partir de la 8e année, soit dès le 1er janvier 2022, que le capital de Valentine dépassera 2 000 €.

2. Si C prend la valeur 1 250, alors $1,02 \times 1250 - 25 = 1250$ et C prend après cette première boucle la même valeur. L'algorithme va donc continuer de « tourner » et puisque $1250 < 2000$, l'algorithme va effectuer la boucle sans jamais s'arrêter.

Partie B

1. L'augmentation annuelle est de 2 %, donc d'une année n à l'année suivante $n+1$, le capital c_n est multiplié par 1,02.

   D'autre part, les frais de fonctionnement sont de 25 € par an, il faut donc retrancher cette somme au capital et on obtient :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = 1,02 \times c_n - 25$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = c_n - 1250$

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= c_{n+1} - 1250 \\
&= 1,02 \times c_n - 25 - 1250 \\
&= 1,02 \times c_n - 1275 \\
&= 1,02\left(c_n - \frac{1275}{1,02}\right) \\
&= 1,02(c_n - 1250) \\
u_{n+1} &= 1,02 u_n
\end{aligned}$$

   Par définition, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $u_0 = c_0 - 1250 = 650$.

   b) Puisque (u_n) est géométrique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 650 \times 1,02^n$.

   En remplaçant u_n par son expression, on obtient :

   $c_n - 1250 = 650 \times 1,02^n$, soit $c_n = 650 \times 1,02^n + 1250$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $c_{n+1} - c_n = 650 \times 1,02^{n+1} + 1250 - 650 \times 1,02^n - 1250 = 650 \times 1,02^n(1,02 - 1) = 13 \times 1,02^n > 0$

   (c_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.

4. Il faut résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned}
c_n &\geqslant 2\,100\\
650\times 1,02^n + 1\,250 &\geqslant 2\,100\\
650\times 1,02^n &\geqslant 2\,100 - 1\,250\\
650\times 1,02^n &\geqslant 850\\
1,02^n &\geqslant \frac{850}{650}\\
n\ln 1,02 &\geqslant \ln\left(\frac{850}{650}\right)\\
n &\geqslant \frac{\ln\left(\frac{850}{650}\right)}{\ln 1,02}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{850}{650}\right)}{\ln 1,02} \approx 13,54.$
C'est à partir de la 14^{e} année que le capital dépassera 2 100 €, c'est à dire dès le 1er janvier 2028.

Exercice 2 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. a) Le graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets A et C ne sont pas adjacents.
   b) Le graphe est connexe car la chaîne A - B - C - D - G - F - H - E relie tous les sommets du graphe, donc 2 sommets quelconques distincts sont toujours reliés par une chaîne.
2. Il n'est pas possible d'organiser une telle tournée car pour cela, il faudrait que le graphe ne possède que des sommets de degré pair d'après le théorème d'Euler, ce qui n'est pas le cas ici (A ; B ; D ; F sont de degré impairs).
3. Les cœfficients de la matrice M^3 donnent le nombre de chaînes de longueur 3 reliant 2 sommets. Ainsi, le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à D est donné par le cœfficient a_{18} situé à l'intersection de la 1ère ligne et de la 8ème colonne. on lit que $a_{18} = 6$.
   On peut donc trouver 6 chemins de longueur 3 reliant A à H. Ce sont les chemins :
   A - B - E - H ; A - B - D - H ; A - E - B - H ; A - E - F - H ; A - F - E - H ; A - F - D - H.

Partie B

Pour déterminer le plus court trajet, utilisons l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	E	F	G	H	D
0	19(A)	∞	6 (A)	10 (A)	∞	∞	∞
	13 (E)	∞	6 (A)	10 (A)	∞	20 (E)	∞
	13(E)	∞		10 (A)	22 (F)	18 (F)	∞
	13 (E)	26 (B)			22 (F)	18 (F)	33 (B)
		26 (B)			22 (F)	18 (F)	31 (H)
		26 (B)			22 (F)		31 (H)
		26(B)					31 (H)
							31 (H)

Le plus court chemin est donc A - F - H - D, il fait 31 km.

Exercice 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a) D'après le logiciel, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x+1} + 1$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$.
D'où le tableau de variations :

x	0		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	$\searrow$	2	$\nearrow$	$10+\mathrm{e}^{-9}$

b) La dérivée s'annule en changeant de signe en 1, et 1 n'est pas une borne donc f admet un extrémum en 1. Au vu des variations, il s'agit d'un minimum qui vaut 2.

2. La ligne 4 du logiciel donne la dérivée de la dérivée soit f'', donc $f''(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.
Une exponentielle étant toujours positive, on a pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$, $f''(x) > 0$ ce qui signifie que f est convexe sur $[0\ ;\ 10]$.

Partie B

1. Sachant que le coût de revient est modélisé par la fonction f et que nous avons vu que f admet un minimum en 1, il faut donc produire 100 objets.
2. a) Chaque objet est vendu 12 €, donc la vente de x centaines d'objets rapporte $12x$ centaines d'euros, soit $1,2x$ milliers d'euros.
b) La marge brute est la différence entre le produit des ventes (soit $1,2x$) et le coût de revient ($f(x)$), c'est-à-dire $g(x) = 1,2x - f(x)$.
En remplaçant, $g(x) = 1,2x - x - \mathrm{e}^{-x+1} = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
c) g est dérivable sur $[0\ ;\ 10]$ et $g'(x) = 0,2 - (-x)'\mathrm{e}^{-x+1} = 0,2 + \mathrm{e}^{-x+1} > 0$ comme somme de 2 nombres strictement positifs.
3. a) g est continue, strictement croissante sur $[0\ ;\ 10]$.
$g(0) = -\mathrm{e} < 0$ et $g(10) = 2 - \mathrm{e}^{-1} > 0$ donc 0 est compris entre $g(0)$ et $g(10)$.
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel $\alpha \in [0\ ;\ 10]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
b) En utilisant les tables de la calculatrice, un encadrement de α est : $1,94 \leqslant \alpha \leqslant 1,95$.
4. L'entreprise réalise une marge brute positive lorsque $g(x) \geqslant 0$, soit pour $x \geqslant \alpha$, c'est donc à partir de 195 objets produits et vendus que l'entreprise va commencer à réaliser une marge brute positive.

Exercice 4 (3 points)

Commun à tous les candidats

Sur $[0\ ;\ 1]$, f est positive continue donc l'aire sous la courbe entre $x = 0$ et $x = a$ est $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Soit F une primitive de f : $F(x) = 2x - x^2$, donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(0) = 2a - a^2$.

L'aire de Δ est celle d'un triangle rectangle (ou bien on prend $a = 1$ dans la relation précédente) : $\mathscr{A}_\Delta = \dfrac{1\times 2}{2} = 1$.

On veut donc que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$, soit $2a - a^2 = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $a^2 - 2a + \dfrac{1}{2} = 0$.
Le discriminant vaut : $(-2)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 4 - 2 = 2 > 0$ donc l'équation possède 2 solutions dans $\mathbb{R}$.
$a_1 = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2} \in [0\ ;\ 1]$ et $a_2 = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2} > 1$.
Donc, il existe une valeur de a pour laquelle le segment $[AB]$ partage l'aire du triangle IOC en deux parties de même aire, c'est :

$$a = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \approx 0,29$$