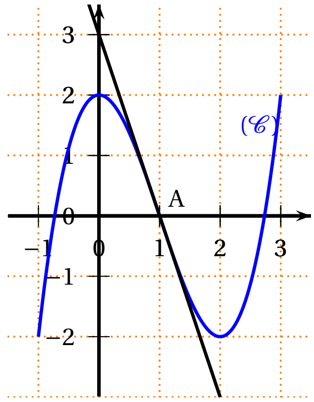
Corrigé du baccalauréat ES – Nouvelle-Calédonie
19 novembre 2015

Exercice 1 **Commun à tous les candidats** **4 points**

On donne ci-contre la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.

On note f' la fonction dérivée de f et F une primitive de f.

La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point $A(1 ; 0)$ est tracée, elle passe par le point de coordonnées $(0 ; 3)$.



1. Calcul de $f'(1)$

a. $f'(1) = 3$ | $\boxed{\textbf{b. } f'(1) = -3}$
c. $f'(1) = -\frac{1}{3}$ | **d.** $f'(1) = 0$

Soit B le point de coordonnées $(3;0)$; la tangente tracée est la droite (AB) donc $f'(1)$ est le coefficient directeur de (AB) : $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-0}{0-1} = -3$

2. La fonction f est :

$\boxed{\textbf{a. } \text{concave sur } [-1 ; 1]}$ | **b.** convexe sur $[-1 ; 1]$
c. concave sur $[0 ; 2]$ | **d.** convexe sur $[0 ; 2]$

Sur $[-1; 1]$ la courbe est entièrement en dessous de ses tangentes donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de I est :

a. $0 \leqslant I \leqslant 1$ | $\boxed{\textbf{b. } 1 \leqslant I \leqslant 2}$
c. $2 \leqslant I \leqslant 3$ | **d.** $3 \leqslant I \leqslant 4$

La fonction f est positive sur l'intervalle $[0; 1]$ donc l'intégrale est égale à l'aire sous la courbe ; il suffit donc de compter les carreaux unité pour déterminer l'encadrement qui convient.

4. La fonction F est :

$\boxed{\textbf{a. } \text{croissante sur } [0 ; 1]}$ | **b.** décroissante sur $[0 ; 1]$
c. croissante sur $[-1 ; 0]$ | **d.** croissante sur $[-1 ; 1]$

La fonction F a pour dérivée la fonction f ; la fonction F est donc croissante sur $[0; 1]$ car f est positive sur cet intervalle.

EXERCICE 2 Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014. On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année $2014+n$, avec n un nombre entier naturel.
On a donc $u_0 = 150$.

1. Il y a 150 élèves en périscolaire en 2014. Il en reste 80 % ce qui fait $150 \times 0,8 = 120$. Il y a 40 nouveaux élèves, ce qui fait $120+40 = 160$.
   Il y aura donc 160 élèves inscrits au périscolaire en 2015.
2. Il y a u_n élèves inscrits l'année $2014+n$. L'année suivante il en reste 80 %, ce qui fait $0,8u_n$. Il y a 40 nouveaux inscrits l'année $2014+(n+1)$ donc $u_{n+1} = 0,8u_n+40$, pour tout entier naturel n.
3. On donne l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à U la valeur 150
Traitement	Tant que $U \leqslant 190$
	n prend la valeur $n+1$
	U prend la valeur $0,8U+40$
	Fin tant que
Sortie	Afficher le nombre $2014+n$

   a. On complète le tableau en s'arrêtant dès que $U > 190$:

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de U	150	160	168	124,40	179,52	183,62	186,89	189,51	191,61
Condition $U \leqslant 190$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

   b. L'affichage en sortie d'algorithme est $2014+8$ soit 2022.
   Cela correspond à la première année pour laquelle le nombre d'inscrits en périscolaire va dépasser 190.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$; donc $u_n = v_n + 200$.

   a.
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,8u_n + 40 - 200 = 0,8(v_n+200) - 160 = 0,8v_n + 160 - 160 = 0,8v_n$
   - $v_0 = u_0 - 200 = 150 - 200 = -50$

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -50$.

   b. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -50$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -50 \times 0,8^n$. Or $u_n = v_n + 200$.
   On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = 200 - 50 \times 0,8^n$.

   c. On résout l'inéquation $200 - 50 \times 0,8^n > 190$

$$\begin{array}{rcll} 200-50\times 0,8^n > 190 & \iff & 10 > 50 \times 0,8^n & \\ & \iff & 0,2 > 0,8^n & \\ & \iff & \ln(0,2) > \ln(0,8^n) & \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;+\infty[\\ & \iff & \ln(0,2) > n\ln(0,8) & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff & \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} < n & \text{car } \ln(0,8) < 0 \end{array}$$

   $\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} \approx 7,2$ donc le plus petit entier naturel n tel que $200 - 50 \times 0,8^n > 190$ est $n = 8$.

   d. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.
   $n = 8$ correspond à l'année $2014+8 = 2022$; c'est donc à partir de 2022 que la directrice du périscolaire sera obligée de refuser des inscriptions.

EXERCICE 2 Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité 5 points

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.
Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.
On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à $0,4$;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à $0,2$;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à $0,85$.

On note :

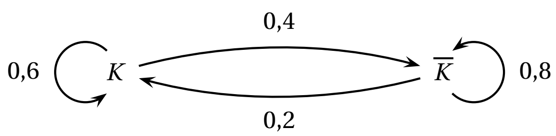
- K l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\overline{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du n-ième jour ;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le n-ième jour ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du n-ième jour.

Partie A

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\overline{K}$:



2. D'après le texte : $\begin{cases} p_{n+1} &= 0,6p_n + 0,2q_n \\ q_{n+1} &= 0,4p_n + 0,8q_n \end{cases}$ ce qui s'écrit sous forme matricielle :

   $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

   La matrice de transition M associée à ce graphe est donc : $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3. Le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à 0,85 donc $p_1 = 0,85$. la proportion de ceux qui choisissent la planche à rame est donc $q_1 = 1 - 0,85 = 0,15$.
   Donc $P_1 = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$

4. L'état probabiliste lors du 3^e^ jour est P_3. À la calculatrice, on trouve :
   $P_2 = P_1 M = \begin{pmatrix} 0,54 & 0,46 \end{pmatrix}$ et $P_3 = P_2 M = \begin{pmatrix} 0,416 & 0,584 \end{pmatrix}$

5. Chaque adolescent choisit un et un seul sport parmi les deux proposés, donc, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n + q_n = 1$.
   $\left.\begin{array}{l} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,2q_n \\ p_n + q_n = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow p_{n+1} = 0,6p_n + 0,2(1 - p_n) \Longleftrightarrow p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ pour tout $n \geqslant 1$

6. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Choisir un nombre entier naturel $N \geqslant 2$
	p prend la valeur $0,85$
Traitement	Pour i allant de 2 à N
	p prend la valeur $0,4p + 0,2$
	Fin pour
Sortie	Afficher p

a. on complète le tableau suivant pour la valeur $N = 5$ saisie :

Valeur de i		2	3	4	5
Valeur de p	0,85	0,54	0,416	0,366	0,347

b. L'affichage en sortie d'algorithme pour $N = 5$ est approximativement de 0,347.

c. Cela signifie que le cinquième jour, il y a une proportion de 34,7 % d'adolescents qui pratiquent le canoë-kayak.

Partie B

D'après la partie A, on sait que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
On admet que $p_n = \frac{31}{60} \times 0,4^{n-1} + \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1. On peut conjecturer que la suite (p_n) a pour limite $\frac{1}{3}$.
   Remarque – Cela se démontre assez facilement en tenant compte du fait que la suite géométrique $(0,4^n)$ *a pour limite 0.*
2. La suite (p_n) a pour limite $\frac{1}{3}$ donc, comme $p_n + q_n = 1$, on peut dire que la suite (q_n) a pour limite $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
   Plus le nombre de jours augmente, plus la proportion d'adolescents pratiquant le canoë-kayak se rapproche d'un tiers, et plus la proportion de ceux pratiquant la planche à rame se rapproche des deux-tiers.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 5 points

Pierre a des pommiers dans son verger. Il décide de faire du jus de pomme avec ses fruits.
Dans sa récolte :

- il dispose de 80 % de pommes de variété A et de 20 % de pommes de variété B.
- 15 % des pommes de variété A et 8 % des pommes de variété B sont avariées et devront être jetées.

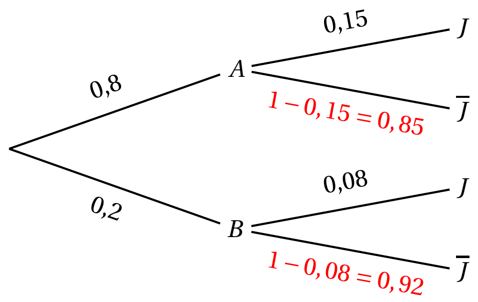
On prend une pomme au hasard dans la récolte et on note :

- A l'évènement « la pomme est de variété A » ;
- B l'évènement « la pomme est de variété B » ;
- J l'évènement « la pomme est jetée » ;
- $\overline{J}$ l'évènement contraire de l'évènement J.

On note $p(A)$ la probabilité de l'évènement A.

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. La pomme est de variété A et est jetée est l'événement $A \cap J$:
$p(A \cap J) = p(A) \times p_A(J) = 0,8 \times 0,15 = 0,12$
3. D'après la formule des probabilités totales :
$p(J) = p(A \cap J) + p(B \cap J) = p(A) \times p_A(J) + p(B) \times p_B(J) = 0,12 + 0,2 \times 0,08 = 0,12 + 0,016 = 0,136$
4. La probabilité qu'une pomme soit de variété A sachant qu'elle a été jetée est $P_J(A)$:
$P_J(A) = \dfrac{p(A \cap J)}{p(J)} = \dfrac{0,12}{0,136} \approx 0,882$

Partie B

Une pomme pèse en moyenne 150 g. On modélise le poids d'une pomme en grammes par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. La probabilité que la pomme ait un poids inférieur à 150 g est $p(X \leqslant 150)$; comme $150 = \mu$, on peut dire que $p(X \leqslant 150) = 0,5$.
2. $p(120 \leqslant X \leqslant 170) \approx 0,976$ d'après la calculatrice.
Cela veut dire que la probabilité qu'une pomme ait un poids compris entre 120 et 170 grammes est de 0,976.

Partie C

Pierre a pris rendez-vous dans une fabrique de jus de pomme artisanale. Il arrive au hasard entre 8 heures et 9 heures 30 minutes.
Son heure d'arrivée est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi uniforme sur [8 ; 9,5].
La probabilité que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45 est $p(8,5 \leqslant Y \leqslant 8,75)$.
D'après le cours : $p(8,5 \leqslant Y \leqslant 8,75) = \dfrac{8,75 - 8,5}{9,5 - 8} = \dfrac{0,25}{1,5} = \dfrac{1}{6}$
Il y a donc une chance sur 6 que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20$.

Partie A

1. $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x+4} + (2x-5) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x+4} + 0 = (-2x+7)\,\mathrm{e}^{-x+4}$
2. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x+4} > 9$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x+7$ qui s'annule et change de signe pour $x = 3,5$.
On calcule :
$f(0) = -5\,\mathrm{e}^4 + 20 \approx -252,991$; $f(3,5) = 2\,\mathrm{e}^{0,5} + 20 \approx 23,297$ et $f(10) = 15\,\mathrm{e}^{-6} + 20 \approx 20,037$
D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0		$3,5$		10
$-2x+7$		$+$	0	$-$	
e^{-x+4}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-252,991$	$\nearrow$	$23,297$	$\searrow$	$20,037$

3. On complète le tableau de variation de la fonction f :

x	0		α		$3,5$		10
$f(x)$	$-252,991$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$23,297$	$\searrow$	$20,037$

On peut en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0; 10]$ et que cette solution est dans $[0; 3,5]$.

$\left.\begin{array}{lcl} f(1) & \approx & -40,3 < 0 \\ f(2) & \approx & 12,6 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1; 2]$ $\left.\begin{array}{lcl} f(1,5) & \approx & -4,4 < 0 \\ f(1,6) & \approx & 0,16 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,5; 1,6]$

$\left.\begin{array}{lcl} f(1,59) & \approx & -0,26 < 0 \\ f(1,60) & \approx & 0,16 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,59; 1,60]$

4. On admet que la fonction F définie sur $[0; 10]$ par $F(x) = (-2x+3)\,e^{-x+4} + 20x$ est une primitive de f sur $[0; 10]$.

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 10]$ est $\dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} f(t)\,dt = \dfrac{1}{10}\Big(F(10) - F(0)\Big)$

$F(10) = -17\,e^{-6} + 200$ et $F(0) = 3\,e^4$ donc $F(10) - F(0) = 200 - 17\,e^{-6} - 3\,e^4$

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 10]$ est donc $\dfrac{200 - 17\,e^{-6} - 3\,e^4}{10} \approx 3,616$.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ par : $f(x) = (2x-5)\,e^{-x+4} + 20$.

1. Le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum correspond à $x = 3,5$ centaines d'objets donc 350 objets.
   $f(3,5) \approx 23,297$ donc le bénéfice maximal réalisé est de 23 297 €.
2. L'entreprise réalise un bénéfice quand il vend au moins x centaines d'objets avec $f(x) > 0$.
   D'après le tableau de variation de la fonction f, il faut pour cela que $x > \alpha$.
   Or $\alpha \in [1,59; 1,60]$ donc il faut vendre au moins 160 objets pour réaliser un bénéfice.
3. La valeur moyenne de la fonction f sur $[0; 10]$ correspond au bénéfice moyen hebdomadaire ; en moyenne, le bénéfice sera de $3,616 \times 1\,000 = 3\,616$ €.