

❧ Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane ❧

20 juin 2016

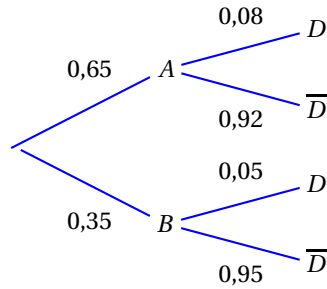
EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. Arbre pondéré :



b. Les évènements A et B forment une partition de l'univers, on a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(\overline{D}) = p(A \cap \overline{D}) + p(B \cap \overline{D}) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,9305.$$

c. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$p_{\overline{D}}(A) = \frac{p(A \cap \overline{D})}{p(\overline{D})} = \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305} = 0,6427$$

2. Soit X le nombre d'ampoules sans défaut. Les choix d'ampoules étant assimilés à un tirage successif avec remise, on est en présence d'un schéma de Bernoulli et X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$ (les ampoules sont issues de la machine A). Par conséquent, à l'aide de la calculatrice :

$$p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = 10 \times 0,92^9 \times 0,08 + 0,92^{10} \approx 0,8121.$$

Partie B

1. a. On a $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = -e^{-\lambda a} + 1$, donc

$$p(T \geq a) = p(\overline{T \leq a}) = 1 - p(T \leq a) = 1 - (-e^{-\lambda a} + 1) = e^{-\lambda a}.$$

b. On a :

$$\begin{aligned} p_{(T \geq t)} &= \frac{p((T \geq t+a) \cap (T \geq t))}{p(T \geq t)} \\ &= \frac{p(T \geq t+a)}{p(T \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda(t+a-t)} \\ &= e^{-\lambda a} \\ &= p(T \geq a). \end{aligned}$$

2. a. D'après le cours $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. On en déduit que $\lambda = \frac{1}{E(T)} = \frac{1}{10000} = 0,0001$.
- b. On a $p(T \geq 5000) = e^{-0,0001 \times 5000} = e^{-0,5} \approx 0,6065$.
- c. Il s'agit de calculer $p_{T \geq 7000}(T \geq 12000)$. Puisque la loi est sans vieillissement :

$$p_{T \geq 7000}(T \geq 12000) = p_{T \geq 7000}(T \geq 7000 + 5000) = p(T \geq 5000) \approx 0,6065.$$

Partie C

1. On fait l'hypothèse que la proportion d'ampoules défectueuses est $p = 0,06$. L'échantillon est de taille $n = 1000$.
On a $n \geq 30$, $np = 60 \geq 5$ et $n(1-p) = 940 \geq 5$. Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont respectées, et, en notant I , cet intervalle on a :

$$\begin{aligned} I &= \left[0,06 - 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{1000}} ; 0,06 + 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{1000}} \right] \\ &= [0,0452 ; 0,0748] \end{aligned}$$

2. Notons f la fréquence observée d'ampoules défectueuses dans l'échantillon, on a $f = \frac{71}{1000} = 0,071$. On constate que $f \in I$, il n'y a donc pas lieu de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 2

3 points

Commun à tous les candidats

1. Notons A le point d'affixe 2. Soit M un point d'affixe z , alors $AM = |z - 2|$. Par conséquent :

$$M \in \mathcal{C} \iff |z - 2| = 1 \iff AM = 1.$$

L'ensemble \mathcal{C} est donc le cercle de centre A et de rayon 1.

2. Posons $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors $z - 2 = (x - 2) + iy$ et $|z - 2| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$. Par conséquent,

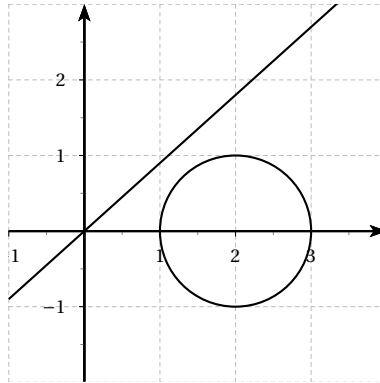
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} &\iff \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (x - 2)^2 + y^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (x - 2)^2 + (ax)^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff x^2 - 4x + 4 + a^2 x^2 = 1 \text{ et } y = ax \\ &\iff (1 + a^2)x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ et } y = ax \end{aligned}$$

$(1 + a^2)x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (1 + a^2) \times 3 = 4 - 12a^2$. On a donc :

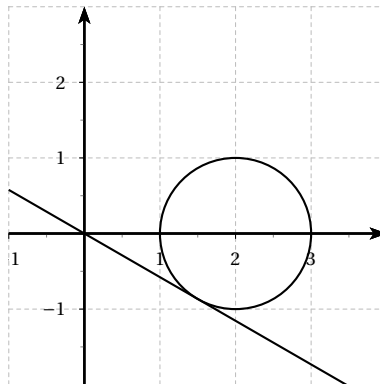
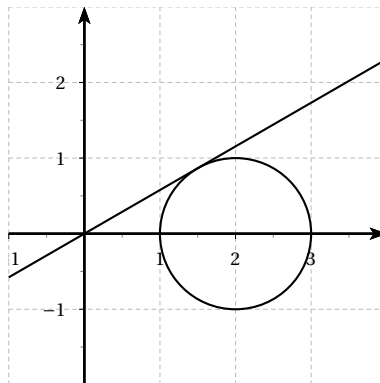
$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\iff 4 - 12a^2 > 0 \\ &\iff a^2 < \frac{1}{3} \\ &\iff -\frac{\sqrt{3}}{3} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

On peut alors distinguer trois cas :

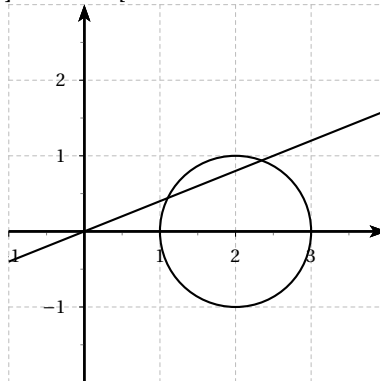
- **Premier cas.** $a \in]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{3} [\cup] \frac{\sqrt{3}}{3} ; \infty [$: aucun point d'intersection.



— **Deuxième cas.** $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$: un seul point d'intersection (la droite et le cercle sont tangents).



— **Troisième cas.** $a \in \left] -\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[$: deux points d'intersection.



EXERCICE 3

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = xe^{1-x^2} = x \times \frac{e}{e^{-x^2}} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$. Par opérations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0. \tag{1}$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$. Par composée des limites on alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$, puis par inverse :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0, \tag{2}$$

enfin, par produit de (1) et (2) on a $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

2. a. On utilise la dérivée d'un produit, ainsi que la dérivée des fonctions de la forme e^u :

$$f'(x) = 1e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

b. Pour tout réel x , $e^{1-x^2} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - 2x^2$. Or :

$$1 - 2x^2 \geq 0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De plus $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{e} = \sqrt{\frac{e}{2}}$; de même $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}}$. On en déduit de ce qui précède le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0		$-\sqrt{\frac{e}{2}}$		$\sqrt{\frac{e}{2}}$		0

Partie B

- Il semble que \mathcal{C}_f soit toujours au dessous de \mathcal{C}_g .
- Soit x un réel tel que $x \leq 0$, alors $xe^{1-x^2} \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \leq 0$, alors que $g(x) = e^{1-x} > 0$ par conséquent il est clair que $f(x) < g(x)$.
- a. Soit x un réel tel que $x > 0$, alors, par application de la fonction \ln qui est strictement croissante :

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\iff xe^{1-x^2} \leq e^{1-x} \\ &\iff \ln x + 1 - x^2 \leq 1 - x \\ &\iff \ln x - x^2 + x \leq 0 \\ &\iff \Phi(x) \leq 0. \end{aligned}$$

- b. On a $\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$. Comme $x > 0$, $\Phi'(x)$ a le même signe que $-2x^2 + x + 1$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 9$ et pour racines $-\frac{1}{2}$ et 1. Ainsi :

$$-2x^2 + x + 1 > 0 \iff -\frac{1}{2} < x < 1.$$

On a $\Phi(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$. Sur $]0 ; +\infty[$ le tableau de variation (sans limite) de Φ est donc :

x	0	1	$+\infty$
$\Phi'(x)$		+	0 -
$\Phi(x)$		0	

- c. Le tableau de variation précédent montre que la fonction Φ possède en 1 un maximum qui vaut 0, autrement dit, pour tout réel $x > 0$, on a $\Phi(x) \leq 0$.
- a. D'après B 1 et B 3 c, on a, pour tout réel x , $f(x) \geq g(x)$. La courbe \mathcal{C}_f est donc toujours en dessous de \mathcal{C}_g .
- b. Sur $] -\infty ; 0]$, on a $f(x) < g(x)$ les courbes n'y ont donc aucun point commun.
Sur $]0 ; +\infty[$, on a $f(x) = g(x) \iff x = 1$. Ces deux courbes ont donc un unique point commun A dont l'abscisse est 1.
- c. On a $f(1) = g(1) = 1$. De plus $f'(1) = (1 - 2 \times 1^2)e^{1-1^2} = -1$, et $g'(x) = -e^{1-x}$ donc $g'(1) = -e^{1-1} = -1$, donc $f'(1) = g'(1)$. Au point d'abscisse 1, les tangentes respectives à \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g passe par un même point, et ont même coefficient directeur, elles sont donc confondues.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On a $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0.$$

On en déduit que

$$(DF) \perp (BG) \quad \text{et} \quad (DF) \perp (BE).$$

La droite (DF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BGE) , elle est donc orthogonale à ce plan, et le vecteur \overrightarrow{DF} est donc un vecteur normal au plan (BGE) .

- b. Les plans \mathcal{P} et (BGE) sont parallèles, le vecteur $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc également un vecteur normal au plan \mathcal{P} . Ce dernier a donc une équation cartésienne du type :

$$x + y + z + d = 0$$

où d est un réel à déterminer. Le plan \mathcal{P} passe par le point $I(\frac{1}{2}; 1; 0)$, donc

$$\frac{1}{2} + 1 + 0 + d = 0 \iff d = -\frac{3}{2}.$$

Une équation cartésienne de \mathcal{P} est donc $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$.

2. Les plans \mathcal{P} et (BGE) sont parallèles. Leurs intersections respectives avec le plan (ABE) sont donc deux droites parallèles. L'une de ces droites est (IN) , l'autre est (BE) . Ainsi dans le triangle ABE les droites (IN) et (BE) sont parallèles et I est le milieu de $[AB]$, donc d'après le théorème « de la droite des milieux » le point N est le milieu de $[AE]$.

3. a. La droite (HB) passe par le point $H(0; 0; 1)$ et a pour vecteur directeur

$\overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b. Les vecteurs \overrightarrow{HG} et \overrightarrow{DF} ne sont pas orthogonaux, la droite (HG) est le plan \mathcal{P} sont donc sécants en un unique point T . Comme $T \in (HG)$, il existe un réel t tel que $T(t; t; 1 - t)$. Alors :

$$T \in \mathcal{P} \iff t + t + 1 - t - \frac{3}{2} = 0 \iff t = \frac{1}{2},$$

les coordonnées de T sont donc $T(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

4. Le tétraèdre $FBGE$

— a pour base le triangle FBG qui est rectangle isocèle en F et a pour aire $\mathcal{B} = \frac{1}{2} \times FE \times FB = \frac{1}{2}$;

— pour hauteur $h = FE = 1$.

Le volume \mathcal{V} du tétraèdre $FBGE$ est donc

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. L'algorithme complété est le suivant :

Variables :	X est un nombre entier
	Y est un nombre entier
Début :	Pour X variant de -5 à 10
	Pour Y variant de -5 à 10
	Si $7 * X - 3 * Y = 1$ alors :
	Afficher X et Y
	Fin Si
	Fin Pour
	Fin Pour
	Fin

2. a. Le couple $(1, 2)$ est une solution particulière de (E) car $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$.

b. Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs, alors :

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ solution de (E)} &\iff 7x - 3y = 7 \times 1 - 3 \times 2 \\ &\iff 7(x - 1) = 3(y - 2)\end{aligned}$$

Ainsi 3 divise $7(x - 1)$, or 3 et 7 sont premiers entre eux, donc, par le théorème de Gauss, 3 divise $x - 1$. Il existe donc un entier relatif k tel que $x - 1 = 3k \iff x = 1 + 3k$. On obtient alors $7 \times 3k = 3(y - 2)$ d'où $y = 2 + 7k$. Réciproquement, on vérifie aisément que les couples du type $(1 + 3k; 2 + 7k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont bien solutions de (E).

c. Soit (x, y) un couple solution de (E), alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 1 + 3k$ et $y = 2 + 7k$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\begin{cases} -5 \leq x \leq 10 \\ -5 \leq y \leq 10 \end{cases} &\iff \begin{cases} -5 \leq 1 + 3k \leq 10 \\ -5 \leq 2 + 7k \leq 10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2 \leq k \leq 3 \\ -1 \leq k \leq \frac{8}{7} \end{cases} \\ &\iff k \in \{-1; 0; 1\}.\end{aligned}$$

Il n'y a donc que trois couples vérifiant les conditions demandées :

$$(-2, 5) \quad (1, 2) \quad \text{et} \quad (4, 9).$$

Partie B

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$MX_n = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

b. La suite (X_n) est géométrique de raison M et de premier terme M_0 , donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$X_n = M^n X_0.$$

2. a. On a, à l'aide de la calculatrice :

$$\begin{aligned}P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{15}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

c. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n = PD^n P^{-1}$.

— **Initialisation.** On a $M^0 = I_3$ (où I_3 est la matrice identité d'ordre 3), et $PD^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1} = P P^{-1} = I_3$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

— **Hérédité.** Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque on ait $M^n = PD^n P^{-1}$, on doit alors montrer que $M^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$.

On a

$$\begin{aligned}M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^n P^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n \times P^{-1}P \times DP^{-1} \\ &= PD^{n+1} P^{-1}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

— **Conclusion.**

La relation est vraie au rang 0 et pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque $M^n = PD^n P^{-1}$ entraîne $M^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier n , on a $M^n = PD^n P^{-1}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} X_n &= M^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} + 12 - \frac{12}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} + 30 - \frac{28}{2^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 + \frac{3}{2^n} \\ -5 + \frac{7}{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = -2 + \frac{3}{2^n}$ et $y_n = -5 + \frac{7}{2^n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $A_n \left(-2 + \frac{3}{2^n}; -5 + \frac{7}{2^n} \right)$ et

$$7 \left(-2 + \frac{3}{2^n} \right) - 3 \left(-5 + \frac{7}{2^n} \right) - 1 = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} - 1 = -15 + 15 = 0$$

ce qui prouve bien que $A_n \in \mathcal{D}$.