∽ Baccalauréat ES/L Antilles–Guyane ∾

19 juin 2014 – Corrigé

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Réponse **a.** : $-1+2^{31}$

   Il faut reconnaitre la somme des 31 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 20.

2. Réponse **b.** : trois solutions distinctes

   $-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x=0 \iff -\dfrac{1}{3}x\left(x^2-3x^2-9\right)=0$; $x=0$ est une solution et le discriminant du trinôme x^2-3x^2-9 est strictement positif ce qui donne deux solutions distinctes et différentes de 0.

3. Réponse **c.** : $F(x)=x\ln x-x$.

   Il suffit de dériver cette fonction F.

4. Réponse **b.** : $n \geqslant 9$

   $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<0{,}003 \iff \ln\left(0{,}5^n\right)<\ln 0{,}003 \iff n\ln 0{,}5<\ln 0{,}003 \iff n>\dfrac{\ln 0{,}003}{\ln 0{,}5}$ et $\dfrac{\ln 0{,}003}{\ln 0{,}5}\approx 8{,}38$

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Partie A

1. **a.** En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}.

   Ce choix d'arrondi correspond à obtenir les résultats au millier d'abonnés près.

   b. Le nombre de millions d'abonnés en 2014 est $u_1=0{,}92u_0+3=0{,}92\times 20+3=21{,}4$.

   Le nombre de millions d'abonnés en 2015 est $u_2=0{,}92u_1+3=0{,}92\times 21{,}4+3=22{,}688$.

On définit la suite (v_n) par $v_n=u_n-37{,}5$ pour tout n de $\mathbb{N}$; donc $u_n=v_n+37{,}5$.

2. $v_{n+1}=u_{n+1}-37{,}5=0{,}92u_n+3-37{,}5=0{,}92(v_n+37{,}5)-34{,}5=0{,}92v_n+34{,}5-34{,}5=0{,}92v_n$

   $v_0=u_0-37{,}5=20-37{,}5=-17{,}5$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=0{,}92$ et de premier terme $v_0=-17{,}5$.

3. On déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times q^n=-17{,}5\times 0{,}92^n$.

   Comme, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n=v_n+37{,}5$, on peut dire que $u_n=-17{,}5\times 0{,}92^n+37{,}5$.

4. $2020=2013+7$ donc le nombre de millions d'abonnés en 2020 est u_7 :

   $u_7=-17{,}5\times 0{,}92^7+37{,}5\approx 27{,}738$.

5. $0\leqslant 0{,}92<1$ donc la suite géométrique (v_n) de raison 0,92 a pour limite 0.

   Comme $u_n=v_n+37{,}5$, la suite (u_n) a pour limite 37,5.

6. Comme la limite de la suite (u_n) est de 37,5, cela veut dire que u_n se rapprochera de la valeur 37,5 donc dépassera à un moment donné la valeur 30.

   À la calculatrice, on trouve $u_{10}\approx 29{,}898$ *et* $u_{11}\approx 30{,}506$.

Partie B

1. On complète l'algorithme pour déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices :

```
Variables :   N un nombre entier naturel non nul
              U un nombre réel
Traitement :  Affecter à U la valeur 20
              Affecter à N la valeur 0
              Tant que U ⩽ 25
                 | affecter à U la valeur 0,92 × U + 3
                 | affecter à N la valeur N + 1
              Fin Tant que
Sortie :      Afficher N
```

2. L'opérateur fera des bénéfices dès que n vérifiera $u_n > 25$; on résout cette inéquation :

$$\begin{aligned} u_n > 25 &\iff -17{,}5 \times 0{,}92^n + 37{,}5 > 25 \\ &\iff 12{,}5 > 17{,}5 \times 0{,}92^n \\ &\iff \frac{12{,}5}{17{,}5} > 0{,}92^n \\ &\iff \ln \frac{12{,}5}{17{,}5} > \ln\left(0{,}92^n\right) && \text{(croissance de la fonction ln)} \\ &\iff \ln \frac{12{,}5}{17{,}5} > n \times \ln 0{,}92 && \text{(propriété de la fonction ln)} \\ &\iff \frac{\ln \frac{12{,}5}{17{,}5}}{\ln 0{,}92} < n && \text{(car } \ln 0{,}92 < 0\text{)} \end{aligned}$$

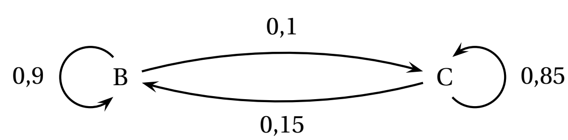
Or $\dfrac{\ln \frac{12{,}5}{17{,}5}}{\ln 0{,}92} \approx 4{,}04$ donc l'opérateur fera des bénéfices la première fois pour $n = 5$ soit en 2018.

À la calculatrice, on trouve $u_4 \approx 24{,}963$ *et* $u_5 \approx 25{,}966$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On représente la situation à l'aide d'un graphe pondéré :



b. En 2013, donc pour $n = 0$, on a constaté qu'il y avait 20 % de consommateurs ayant le profil bio donc $a_0 = 0{,}2$; $b_0 = 1 - a_0 = 0{,}8$.

$P_0 = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

La matrice de transition M est la matrice 2×2 telle que $P_n \times M = P_{n+1}$.

D'après le texte, on peut dire que : $\left\{ \begin{array}{l} b_{n+1} = 0{,}9 b_n + 0{,}15 c_n \\ c_{n+1} = 0{,}1 b_n + 0{,}85 c_n \end{array} \right.$

Donc la matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

c. On donne la matrice $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}825 & 0{,}175 \\ 0{,}2625 & 0{,}7375 \end{pmatrix}$

La probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio » est donnée par b_2 ; on va donc calculer $P_2 = \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \end{pmatrix}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n \times M = P_{n+1}$ donc $P_1 \times M = P_2$ et $P_0 \times M = P_1$, donc $P_0 \times M \times M = P_2$ et donc

$$\begin{aligned} P_2 = P_0 \times M^2 &= \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}825 & 0{,}175 \\ 0{,}2625 & 0{,}7375 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}2 \times 0{,}825 + 0{,}8 \times 0{,}2625 & 0{,}2 \times 0{,}175 + 0{,}8 \times 0{,}7375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio » est de 0,375.

d. L'état stable du graphe probabiliste est l'état $\begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix}$ tel que $\left\{\begin{array}{r c l} \begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix} \times M &=& \begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix} \\ b+c &=& 1 \end{array}\right.$

$\begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} 0{,}9b + 0{,}15c = b \\ 0{,}1b + 0{,}85c = c \end{array}\right. \iff 0{,}1b - 0{,}15c = 0 \iff b = 1{,}5c$

$\left\{\begin{array}{r c l} b &=& 1{,}5c \\ b+c &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r c l} b &=& 1{,}5c \\ 2{,}5c &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r c l} b &=& 0{,}6 \\ c &=& 0{,}4 \end{array}\right.$ L'état stable est $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

2. a. L'algorithme suivant donne le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée :

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	B un nombre réel
Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à B la valeur 0,2
	Affecter à C la valeur 0,8
	Tant que $B \leqslant 0{,}5$
	affecter à B la valeur $0{,}9 \times B + 0{,}15 \times C$
	affecter à C la valeur $1 - B$
	affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

b. À la calculatrice, on trouve :
$P_3 = P_2 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix} \times M \approx \begin{pmatrix} 0{,}431 & 0{,}569 \end{pmatrix}$
$P_4 = P_3 \times M \approx \begin{pmatrix} 0{,}473 & 0{,}527 \end{pmatrix}$
$P_5 = P_4 \times M \approx \begin{pmatrix} 0{,}505 & 0{,}495 \end{pmatrix}$
L'affirmation du directeur est vraie au bout de 5 années, donc en 2018.

EXERCICE 3 — 5 points

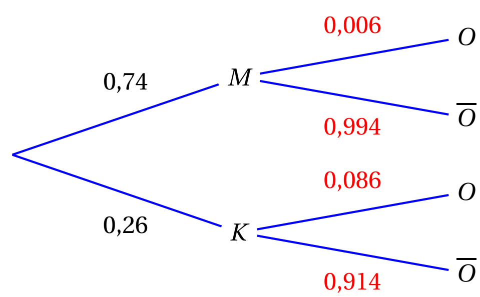
Commun à tous les candidats

Partie A

1. D'après le texte, on sait que :

- 0,6 % des médecins pratiquent l'ostéopathie ce qui veut dire que $P_M(O) = 0{,}006$ et donc que $P_M\left(\overline{O}\right) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$;
- 8,6 % des kinésithérapeutes pratiquent l'ostéopathie ce qui veut dire que $P_K(O) = 0{,}086$ et donc que $P_K\left(\overline{O}\right) = 1 - 0{,}086 = 0{,}914$.

D'où l'arbre :



2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(O) = P(M \cap O) + P(K \cap O) = 0{,}74 \times 0{,}006 + 0{,}26 \times 0{,}086 = 0{,}0268$

3. Un patient vient de suivre une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories.
La probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute est $P_O(K)$:
$P_O(K) = \dfrac{P(K \cap O)}{P(O)} = \dfrac{0{,}26 \times 0{,}086}{0{,}0268} \approx 0{,}083.$

Partie B

1. La probabilité $P(20 \leqslant T \leqslant 40)$ correspond à $P(\mu - \sigma \leqslant T \leqslant \mu + \sigma)$ où μ représente l'espérance et σ l'écart type ; d'après le cours, $P(\mu - \sigma \leqslant T \leqslant \mu + \sigma)$ a pour valeur arrondie au centième 0,68.
2. La probabilité qu'une visite dure plus de trois quart d'heure est $P(T \geqslant 45)$.
   À la calculatrice, on trouve $P(T \geqslant 45) \approx 0,07$.

Partie C

1. **a.** Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
   $n = 47\,000 \geqslant 30$; $p = 0,006$ donc $np = 47\,000 \times 0,006 = 282 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 47\,000 \times 0,994 = 46\,718 \geqslant 5$.
   Donc les trois conditions sont réalisées.

   b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :
   $$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   $$= \left[0,006 - 1,96\frac{\sqrt{0,006 \times 0,994}}{\sqrt{47000}}\,;\, 0,006 + 1,96\frac{\sqrt{0,006 \times 0,994}}{\sqrt{47000}}\right] \approx [0,0053 \quad 0,0067]$$
   La région compte 47 000 médecins dont 164 ostéopathes, ce qui fait une fréquence de $f = \dfrac{164}{47\,000} \approx 0,003$.
   La fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation trouvé et elle est plus petite que la borne inférieure de cet intervalle ; on peut donc dire que cette région est défavorisée par rapport à la situation de la France métropolitaine.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,15]$ par $g(x) = 18x + \mathrm{e}^{0,5x-1}$.

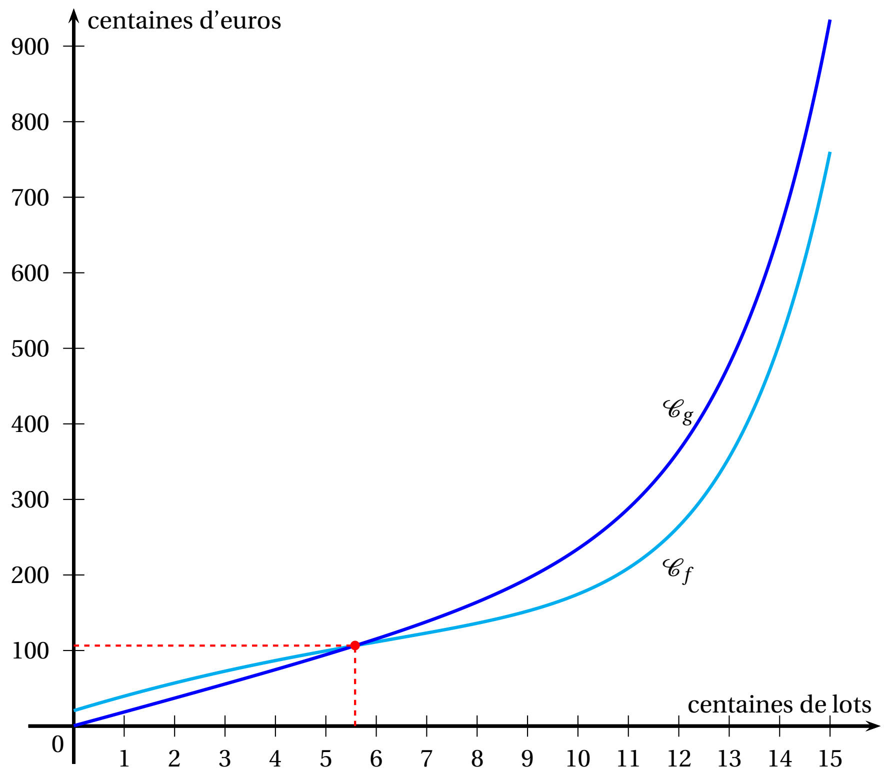
1. $g'(x) = 18 + 0,5\,\mathrm{e}^{0,5x-1}$
2. Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{0,5x-1} > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;\,15]$;
   la fonction g est donc strictement croissante sur $[0\,;\,15]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,15]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20$.

1. La nouvelle machine permet d'obtenir un coût inférieur à l'ancien quand la courbe $\mathscr{C}_f$ sera en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$; voir figure page 5.
   Le nombre k de lots à partir duquel la nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production est compris entre 500 et 600.
2. **a.** Le coût avec la nouvelle machine est inférieur au coût avec l'ancienne quand $f(x) \leqslant g(x)$;
   $$\begin{aligned} f(x) \leqslant g(x) &\iff \mathrm{e}^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20 \leqslant 18x + \mathrm{e}^{0,5x-1} \\ &\iff -x^2 + 20x + 20 \leqslant 18x \\ &\iff -x^2 + 2x + 20 \leqslant 0 \end{aligned}$$

   b. On résout dans $[0\,;\,15]$ l'inéquation $-x^2 + 2x + 20 \leqslant 0$:
   $\Delta = 84 > 0$ donc l'équation $-x^2 + 2x + 20 = 0$ admet deux solutions distinctes
   $\dfrac{-2 + \sqrt{84}}{-2} = 1 - \sqrt{21} < 0$ et $1 + \sqrt{21} \in [0\,;\,15]$.
   Le trinôme $-x^2 + 2x + 20$ est du signe de $a = -1$ donc négatif à l'extérieur des racines.
   Donc $-x^2 + 2x + 20 \leqslant 0$ si $x \in [1 + \sqrt{21}\,;\,15]$.



c. Le nombre x représente le nombre de centaines de lots ; $1+\sqrt{21} \approx 5{,}583$.
Donc la nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production à partir de 559 lots.

3. Le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction f'.
La valeur moyenne du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots est $\dfrac{1}{8-5}\displaystyle\int_5^8 f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\left[f(x)\right]_5^8 = \dfrac{f(8)-f(5)}{3} \approx 12{,}20$.
La valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal entre 5 et 8 centaines de lots est de 1 220 €.