

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 - c.

On peut éliminer rapidement les réponses **a.** et **d.** car les vecteurs directeurs des droites proposées ne sont pas colinéaires au vecteur \vec{u} .

La représentation paramétrique donnée en **c.** est une droite qui contient le point A pour la valeur $t = -1$.

Question 2 - c.

Le plus efficace pour répondre à cette question est de résoudre le système

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \\ 2x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

qui donne $-\frac{2}{3}$ comme valeur à t et qui conduit au point E.

Question 3 - d.

On appelle \vec{n} (2; 1; -1) un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

On montre successivement que $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ ce qui prouve que les plans \mathcal{P} et (ABC) sont parallèles. Or $A \notin \mathcal{P}$ donc les plans sont strictement parallèles.

Question 4 - a.

On utilise l'expression du produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \iff 12 = \sqrt{8} \times \sqrt{21} \times \cos \widehat{BAC}$ donc $\cos \widehat{BAC} \approx 0,9258$ ce qui correspond à $22,2^\circ$.

Exercice 2

6 points

Commun à tous les candidats

On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française; cette variable suit la loi normale de moyenne $\mu = 45,5$ et d'écart type σ .

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 45,5}{\sigma}$.

1. **a.** D'après le cours, la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, d'espérance 0 et d'écart type 1.
- b.** D'après le cours, si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ , $P(X \leq \mu) = 0,5$.
Cela résulte de la symétrie de la courbe de Gauss autour de la droite d'équation $x = \mu$.
2. En prenant $\sigma = 3,8$, $\mu - 2\sigma = 45,5 - 2 \times 3,8 = 37,9$ et $\mu + 2\sigma = 45,5 + 2 \times 3,8 = 53,1$.
Or on sait que si la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres μ et σ :
 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ donc $P(37,9 \leq X \leq 53,1) \approx 0,95$.

Partie B

On définit les événements :

- M : « l'individu est porteur de la maladie V »;
- S : « l'individu a plus de 50 ans »;
- H : « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

1. a. On sait que 90 % des porteurs de la maladie V ont plus de 50 ans donc $P_M(S) = 0,9$.
 $P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0,01 \times 0,9 = 0,009$.
- b. La probabilité qu'un individu ayant plus de 50 ans soit porteur de la maladie V est
 $P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)}$.
 On sait que 30 % de la population a plus de 50 ans, donc $P(S) = 0,3$.
 On déduit : $P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0,009}{0,3} = 0,03$.
2. a. $P(H) = P(X > \alpha) = 1 - P(X \leq \alpha) = 1 - 0,995 = 0,005$
- b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α (événement \overline{H}) ; la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est $P_{\overline{H}}(M)$.

$$P_{\overline{H}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{H})}{P(\overline{H})}$$
 On sait que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V, donc $P_H(M) = 0,6$. On en déduit que $P(H \cap M) = P(H) \times P_H(M) = 0,05 \times 0,6 = 0,003$.
 D'après la formule des probabilités totales, $P(M) = P(M \cap H) + P(M \cap \overline{H})$ donc
 $P(M \cap \overline{H}) = P(M) - P(M \cap H) = 0,01 - 0,003 = 0,007$.

$$P_{\overline{H}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{0,007}{0,995} \approx 0,007$$
 La probabilité qu'un individu soit porteur de la maladie sachant qu'il a un taux d'hématocrite inférieur ou égale à α est de 0,007.

Partie C

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence p de la maladie V dans un échantillon de taille n est : $I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$
 $p = P(M) = 0,01$ et $n = 1000$ donc :

$$I = \left[0,01 - 1,96 \frac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{1000}} ; 0,01 + 1,96 \frac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0,003 ; 0,017]$$
2. Dans un échantillon aléatoire de 1000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V donc $f = \frac{14}{1000} = 0,014$.
 Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % donc l'échantillon étudié peut être considéré comme « normal » ; on peut conclure que le gène ne semble pas avoir d'influence sur la maladie.

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Soit g la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $g(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$ où a est un réel strictement positif.
 On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$.

1. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables : $f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x-1) \times 2e^{2x} - 1 = (2x-1)e^{2x} - 1$
 $f'(0) = -e^0 - 1 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^{2x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$
2. $f''(x) = 2 \times e^{2x} + (2x-1) \times 2e^{2x} = (2+4x-2)e^{2x} = 4xe^{2x}$
3. • Pour tout x , $e^{2x} > 0$ donc la fonction f'' est strictement positive sur $]0; +\infty[$, et donc la fonction f' est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
 • La fonction f' est continue $[0; +\infty[$.

- $f'(0) = -2 < 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$; on appelle x_0 cette solution.

On aurait pu également établir le tableau de variations de la fonction f' .

4. a. D'après la question précédente :

- $f'(x) < 0$ sur $[0; x_0[$ donc f est strictement décroissante sur $[0; x_0]$;
- $f'(x) > 0$ sur $]x_0; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \times e^0 - 1 = -2 < 0 \\ f \text{ est décroissante sur } [0; x_0] \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) < 0 \text{ pour tout } x \in [0; x_0] \Rightarrow f(x_0) < 0$$

b. $f(2) = 1 \times e^4 - 1 - 2 = e^4 - 3 \approx 51,6 > 0$

- La fonction f est strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$.
- La fonction f est continue sur $[x_0; +\infty[$.
- $f(x_0) < 0$
- $f(2) = e^4 - 3 > 0$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[x_0; 2]$.

$f(2) > 0$ et f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

Comme $f(x) < 0$ sur $[0; x_0]$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[0; x_0]$.

On peut donc dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; +\infty[$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[x_0; 2]$; on l'appelle a .

En utilisant la calculatrice, on trouve $a \approx 1,20$.

Pour déterminer une valeur approchée de x_0 à la calculatrice, on peut programmer la fonction f et utiliser le tableau de valeurs, ou utiliser le solveur si la calculatrice en possède un.

5. On admet que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression $L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx$.

La fonction $x \mapsto e^{ax}$ où $a \neq 0$ a pour primitive $x \mapsto \frac{e^{ax}}{a}$ donc la fonction $x \mapsto e^{ax} + e^{-ax}$ a pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{e^{ax}}{a} + \frac{e^{-ax}}{-a}$ soit $x \mapsto \frac{1}{a}(e^{ax} - e^{-ax})$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx = \left[\frac{1}{a}(e^{ax} - e^{-ax}) \right]_0^1 = \left[\frac{1}{a}(e^a - e^{-a}) \right] - \left[\frac{1}{a}(e^0 - e^0) \right] = \frac{1}{a}(e^a - e^{-a}) \\ &= \frac{1}{1,2}(e^{1,2} - e^{-1,2}) \approx 2,52 \end{aligned}$$

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Pour n de \mathbb{N}^* , on note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on définit le nombre I_n par $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. Pour tout n de \mathbb{N}^* et tout x de $[0; 1]$, $1+x^n > 0$ donc $f_n(x) > 0$.

Donc $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe représentant la fonction f_n , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

D'après le graphique, cette aire tend à se rapprocher de 1 quand n tend vers $+\infty$.

2. $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

3. a. Pour tout n de \mathbb{N}^* et tout x de $[0; 1]$:

$$0 \leq x^n \leq 1 \iff 1 \leq 1 + x^n \leq 2 \iff \frac{1}{1} \geq \frac{1}{1 + x^n} \geq \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{1}{1 + x^n} \leq 1.$$

b. Pour tout x de $[0; 1]$, $\frac{1}{1 + x^n} \leq 1$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^n} dx \leq \int_0^1 1 dx \iff I_n \leq [x]_0^1 \iff I_n \leq 1$$

4. Pour tout n de \mathbb{N} et pour tout x , $(x^n)^2 \geq 0$ donc $1 - (x^n)^2 \leq 1$ ce qui équivaut à $(1 - x^n)(1 + x^n) \leq 1$ et comme $1 + x^n > 0$ pour $x \in [0; 1]$: $1 - x^n \leq \frac{1}{1 + x^n}$.

$$5. \int_0^1 (1 - x^n) dx = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] - 0 = \frac{n}{n+1}$$

6. On a vu que, pour tout n de \mathbb{N} et tout réel x de $[0; 1]$, $1 - x^n \leq \frac{1}{1 + x^n}$. D'après la positivité de

l'intégration, on peut en déduire que $\int_0^1 (1 - x^n) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1 + x^n} dx$ c'est-à-dire $\frac{n}{n+1} \leq I_n$.

On a vu aussi que pour tout n , $I_n \leq 1$.

Donc, pour tout n , $\frac{n}{n+1} \leq I_n \leq 1$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ ce qui équivaut à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

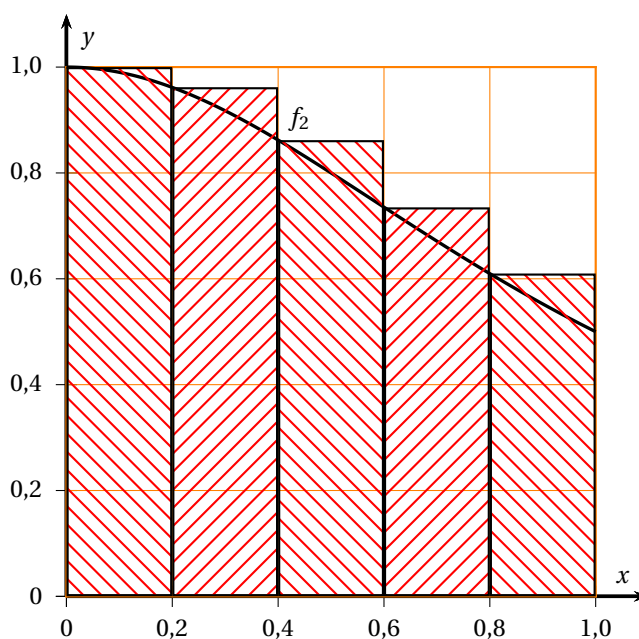
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $\frac{n}{n+1} \leq I_n \leq 1$; donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et a pour limite 1.

7. a. On fait tourner l'algorithme proposé avec $n = 2$ et $p = 5$:

k	x	I
0	0	0,2
1	0,2	0,392
2	0,4	0,565
3	0,6	0,712
4	0,8	0,834

La valeur de I arrondie au centième qui sera affichée est 0,83.

b. Il faut reconnaître dans l'algorithme proposé la méthode des rectangles permettant de calculer des valeurs approchées d'aire sous une courbe; plus précisément, comme la fonction f_n est décroissante sur $[0; 1]$, on obtient la somme de rectangles majorant l'intégrale I_n cherchée.



Exercice 4**5 points****Candidats ayant choisi la spécialité mathématique****Partie A**

- On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés p_1, p_2, \dots, p_n . On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 : $E = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$.
Le nombre 2 est premier donc il est dans la liste $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ donc le produit de ces nombres premiers est supérieur ou égal à 2 et donc E est supérieur ou égal à 2.
Soit i un entier de l'intervalle $[1; n]$.
Le reste de la division de E par p_i est 1 ; donc E n'est pas divisible par p_i . Comme p_i est un nombre premier, et que E n'est pas divisible par p_i , alors E et p_i sont premiers entre eux.
Donc E est premier avec chacun des nombres p_1, p_2, \dots, p_n .
- Tout nombre supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier, donc E admet un diviseur premier. Ce diviseur premier ne peut être ni p_1 , ni p_2 , ni \dots , ni p_n ; donc il existe un autre nombre premier qui n'est ni p_1 , ni p_2 , ni \dots , ni p_n , ce qui contredit l'hypothèse faite au départ.
Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$. On dit que M_k est le k -ième nombre de Mersenne.

- a. On calcule M_k pour quelques valeurs de k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

- b. Pour $k = 2$ premier, $M_2 = 3$ est premier. Pour $k = 3$ premier, $M_3 = 7$ est premier. Pour $k = 5$ premier, $M_5 = 31$ est premier. Pour $k = 7$ premier, $M_7 = 127$ est premier.
D'après ce tableau, on peut conjecturer que si k est premier, alors M_k est premier.
- Soient p et q deux entiers naturels non nuls.
 - $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \dots + (2^p)^{q-1}$ est la somme des q premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2^p ; cette somme est égale à :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} = 1 \times \frac{1 - (2^p)^q}{1 - 2^p} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$$
 - Le nombre $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \dots + (2^p)^{q-1}$ est entier et, d'après la question précédente, $(1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \dots + (2^p)^{q-1}) \times (2^p - 1) = 2^{pq} - 1$ donc $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.
 - Soit k un nombre non premier ; alors il existe deux entiers strictement plus grands que 1 tels que $k = pq$.
 $M_k = 2^k - 1 = 2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ qui est strictement plus grand que 1 : donc M_k n'est pas premier.
- a. $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ donc M_{11} n'est pas premier.
b. La conjecture de la question 1.b. est donc fautive : 11 est premier et M_{11} ne l'est pas.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}$ pour tout entier naturel n

- D'après le test de Lucas-Lehmer, M_5 est premier si et seulement si $u_3 \equiv 0$ modulo M_5 .
 $M_5 = 31$; $u_0 = 4$; $u_1 = u_0^2 - 2 = 14$; $u_2 = u_1^2 - 2 = 194$; $u_3 = u_2^2 - 2 = 37634 = 31 \times 1214$
Donc u_3 est divisible par M_5 donc le test de Lucas-Lehmer est vérifié pour $k = 5$.
- L'algorithme suivant permet de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer :

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geq 3$ M prend la valeur $2^n - 1$ Pour i allant de 1 à $n - 2$ faire u prend la valeur $u^2 - 2$ Fin Pour Si M divise u alors afficher « M est premier » sinon afficher « M n'est pas premier »