Baccalauréat ES/L Amérique du Sud
17 novembre 2014

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point. Aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Une bibliothèque municipale dispose pour ses usagers de deux types de livres : les livres à support numérique et les livres à support papier.

Le service des prêts observe que 85 % des livres empruntés sont à support papier.
Un livre est rendu dans les délais s'il est rendu dans les quinze jours suivant son emprunt.
Une étude statistique montre que 62 % des livres à support numérique sont rendus dans les délais et que 32 % des livres à support papier sont rendus dans les délais.

Un lecteur, choisi au hasard, emprunte un livre de cette bibliothèque. On note :
- N l'évènement : « le livre a un support numérique » ;
- D l'évènement : « le livre est rendu dans les délais ».

Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

1. La probabilité de D sachant N est égale à :

   a. 0,62 **b.** 0,32 **c.** 0,578 **d.** 0,15

2. $P\left(\overline{N} \cap \overline{D}\right)$ est égale à :

   a. 0,907 **b.** 0,272 **c.** 0,578 **d.** 0,057

3. La probabilité de l'évènement D est égale à :

   a. 0,272 **b.** 0,365 **c.** 0,585 **d.** 0,94

4. On appelle X la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,62$.

   4.1 La probabilité à 10^{-3} près d'avoir $X \geqslant 1$ est :

   a. 0,8 **b.** 0,908 **c.** 0,092 **d.** 0,992

   4.2 L'espérance de X est :

   a. 3,1 **b.** 5 **c.** 2,356 **d.** 6,515

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4]$,
   $f'(x) = (7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

   b. Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

   $$F(x) = (1-3x)\mathrm{e}^{-x}+2x.$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$.

   b. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,4]$
5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f''(x) = (3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.

   a. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

   b. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Une agence de presse a la charge de la publication d'un journal hebdomadaire traitant des informations d'une communauté de communes dans le but de mieux faire connaître les différents évènements qui s'y déroulent.

Un sondage prévoit un accueil favorable de ce journal dans la population.
Une étude de marché estime à 1 200 le nombre de journaux vendus lors du lancement du journal avec une progression des ventes de 2 % chaque semaine pour les éditions suivantes.
L'agence souhaite dépasser les 4 000 journaux vendus par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus n semaines après le début de l'opération. On a donc $u_0 = 1\,200$.

1. Calculer le nombre u_1 de journaux vendus une semaine après le début de l'opération.
2. Écrire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer à partir de combien de semaines le nombre de journaux vendus sera supérieur à 1 500.
4. Voici un algorithme :

VARIABLES :	U est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	U prend la valeur 1 200
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $U < 4000$
	N prend la valeur $N+1$
	U prend la valeur $1,02 \times U$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

a. Déterminer la valeur de N affichée par cet algorithme.

b. Interpréter le résultat précédent.

5. a. Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$1 + 1,02 + 1,02^2 + \cdots + 1,02^n = 50 \times \left(1,02^{n+1} - 1\right).$$

b. On pose, pour tout entier n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
À l'aide de la question précédente, montrer que l'on a :
$S_n = 60\,000 \times \left(1,02^{n+1} - 1\right)$.

c. Déduire de la question précédente le nombre total de journaux vendus au bout de 52 semaines. Le résultat sera arrondi à l'unité.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La première semaine de l'année, le responsable de la communication d'une grande entreprise propose aux employés de se déterminer sur un nouveau logo, le choix devant être fait par un vote en fin d'année.
Deux logos, désignés respectivement par A et B, sont soumis au choix.
Lors de la présentation qui se déroule la première semaine de l'année, 24 % des employés sont favorables au logo A et tous les autres employés sont favorables au logo B.
Les discussions entre employés font évoluer cette répartition tout au long de l'année.
Ainsi 9 % des employés favorables au logo A changent d'avis la semaine suivante et 16 % des employés favorables au logo B changent d'avis la semaine suivante.

Pour tout n, $n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo A la semaine n ;
- b_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo B la semaine n ;
- P_n la matrice $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

On a donc, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n + b_n = 1$ et $P_1 = (0,24 \quad 0,76)$.

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. **a.** À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer, pour tout $n \geqslant 1$, a_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

   b. En déduire que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,16$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner, sans justifier, la probabilité à 0,001 près qu'un employé soit favorable au logo A la semaine 4.
5. On note $P = (a \quad b)$ l'état stable de la répartition des employés.

   a. Déterminer un système de deux équations que doivent vérifier a et b.

b. Résoudre le système obtenu dans la question précédente.

c. On admet que l'état stable est $P = (0,64 \quad 0,36)$. Interpréter le résultat.

6. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,24$
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $A < 0,639$
	N prend la valeur $N+1$
	A prend la valeur $0,75 \times A + 0,16$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir (on ne demande pas de donner la valeur de N affichée).

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les deux parties 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

Les probabilités et les fréquences demandées seront données à $0,001$ *près.*

Dans un atelier de confiserie, une machine remplit des boîtes de berlingots après avoir mélangé différents arômes.

Partie 1

On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque boîte prélevée au hasard, associe sa masse (en gramme) est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 9$.

1. a. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que la masse X soit comprise entre 485 g et 515 g.

b. L'atelier proposera à la vente les boîtes dont la masse est comprise entre 485 g et 515 g.

Déterminer le nombre moyen de boîtes qui seront proposées à la vente dans un échantillon de 500 boîtes prélevées au hasard.

La production est suffisamment importante pour assimiler cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que la masse X soit supérieure ou égale à 490 g.

3. a. À l'aide de la calculatrice, déterminer à l'unité près l'entier m tel que $p(X \leqslant m) = 0,01$.

b. Interpréter ce résultat.

Partie 2

La machine est conçue pour que le mélange de berlingots comporte 25 % de berlingots parfumés à l'anis.

On prélève 400 berlingots au hasard dans le mélange et on constate que 84 sont parfumés à l'anis.

1. Déterminer un intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des berlingots parfumés à l'anis dans un échantillon de 400 berlingots.

2. Calculer la fréquence f des berlingots parfumés à l'anis dans l'échantillon prélevé.
3. Déterminer si, au seuil de confiance de 95 %, la machine est correctement programmée.