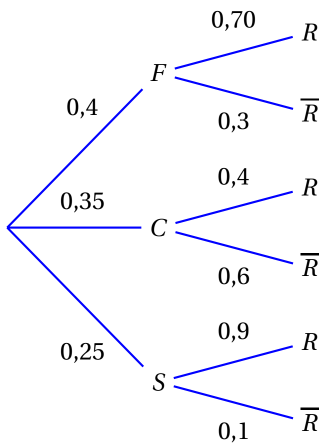
Baccalauréat ES Liban
27 mai 2014 – Corrigé

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. $P(F)$ est la probabilité que la table choisie au hasard soit occupée par une famille.
   On a donc $P(F) = 0{,}4$.
   $P_S(R)$ est la probabilité que le serveur reçoivent un pourboire sachant que la table est occupée par une personne seule.
   On a donc $P_S(R) = 0{,}9$.
2. L'arbre complété est le suivant :



3. **a.** $P(F \cap R) = P(F)P_F(R) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$
   b. $P(R) = P(F \cap R) + P(F \cap C) + P(F \cap S) = 0{,}28 + 0{,}35 \times 0{,}4 + 0{,}25 \times 0{,}9 = 0{,}645$
4. $$P_R(C) = \frac{P(R \cap C)}{P(R)} = \frac{0{,}14}{0{,}645} \approx 0{,}217$$
   La probabilité que la table soit occupée par un couple, sachant que le serveur a reçu un pourboire est d'environ 0,217.

Partie B

1. **a.** $$P(6 \leqslant X \leqslant 24) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$$
   La probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soient compris entre 6 et 24 euros est d'environ 0,95.
   b. $$P(X \geqslant 20) \approx 0{,}13$$
2. $$P_{6 \leqslant X \leqslant 24}(X \geqslant 20) = \frac{P(20 \leqslant X \leqslant 24)}{P(6 \leqslant X \leqslant 24)} \approx \frac{0{,}11}{0{,}954} \approx 0{,}12.$$

EXERCICE 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **La proposition correcte est la proposition c.**
Chaque choix de jeune peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli. Le succès est l'évènement « le jeune est fumeur régulier ». La probabilité de succès est 0,236. On répète 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Si on note X la variable aléatoire correspondant au nombres de succès, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}236$.

$$P(X = 0) = 0{,}764^{10} \approx 0{,}068$$

2. **La proposition correcte est la proposition a.**

La taille de l'échantillon n est supérieure à 30. On a également

$$np = 500 \times 0{,}236 = 118 \geqslant 5 \text{ et } n \times (1 - p) = 500 \times 0{,}764 = 382 \geqslant 5.$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donc

$$\left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$p - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}236 - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{\sqrt{500}} \approx 0{,}198$. Pour la borne inférieure, on donne une valeur approchée par défaut.
$p + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}236 + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{\sqrt{500}} \approx 0{,}274$. Pour la borne supérieure, on donne une valeur approchée par excès.

3. **La proposition correcte est la proposition a.**

$$2 \times 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}01 \iff \frac{\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{0{,}005}{1{,}96} \iff \sqrt{n} \geqslant \frac{1{,}96\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{0{,}005}$$

$$n \geqslant \left(\frac{1{,}96\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{0{,}005}\right)^2 \approx 27\,707.$$

4. **La proposition correcte est la proposition b.**
Dans cet échantillon de 250 jeunes fumeurs, la fréquence f de filles est $\frac{99}{250}$ soit 39,6 %.
On a bien $n \leqslant 30$, $nf \leqslant 5$ et $n(1 - f) \leqslant 5$. L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est donné par la formule suivante.

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

$f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}396 - \dfrac{1}{\sqrt{250}} \approx 0{,}33$. On arrondit la borne inférieure par défaut.
$f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}396 + \dfrac{1}{\sqrt{250}} \approx 0{,}46$. On arrondit la borne supérieure par excès.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de la spécialité et candidats de la série L

1. **a.** a_1 correspond au nombre d'inscrits en 2014. Il y a 80 % des inscrits de 2013 qui renouvellent leur inscription, soit $0{,}8 \times 2\,500$ soit 2 000 personnes. Avec 400 nouveaux adhérents, on peut donc compter sur 2 400 inscriptions. $a_1 = 2\,400$.
De même, $a_2 = 0{,}8 \times 2\,400 + 400 = 2\,320$

b. Pour l'année $2013 + n + 1$, le nombre d'anciens adhérents renouvelant leur inscription représente 80 % des inscrits de l'année précédente, soit $0{,}8a_n$. En ajoutant 400 nouvelles inscriptions, on obtient bien, suivant la modélisation proposée,

$$a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 400.$$

2. a. Pour tout entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 2\,000 = 0{,}8a_n + 400 - 2\,000 = 0{,}8a_n - 1\,600 = 0{,}8\,(a_n - 2\,000) = 0{,}8v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
De plus, $v_0 = a_0 - 2\,000 = 2\,500 - 2\,000 = 500$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout entier naturel n, $v_n = 500 \times 0{,}8^n$.
Par suite, $a_n = v_n + 2\,000 = 500 \times 0{,}8^n + 2\,000$.

c. Une suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 converge vers 0. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 0{,}8^n + 2\,000 = 2\,000.$$

d. Au fil des années, le nombre d'adhérents se stabilisera autour de 2 000.

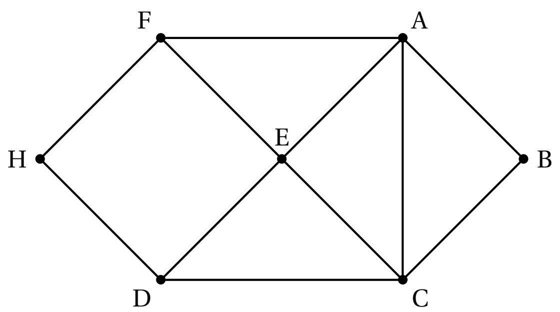
3. a. Cet algorithme permet de déterminer à partir de quelle année le nombre d'adhérents passera en dessous des 2 050.

b. $a_{10} \approx 2\,054$ et $a_{11} \approx 2043$. La réponse donnée par l'algorithme est donc $n = 11$ et c'est donc en 2024 que le nombre d'adhérents sera inférieur pour la première fois à 2 050.

EXERCICE 3 — 5 points

ES Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC (Maison de la Jeunesse et de la Culture) par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.



En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle (bureau du directeur et hall inclus) les objets oubliés par les enfants.

1. Dans le graphe donné dans le texte, deux sommets quelconques peuvent être reliés entre eux par au moins un chemin donc ce graphe est connexe.
2. Le graphe donné dans le texte est connexe et non orienté car les sommets sont reliés par des arêtes et pas par des arcs.

   Pour que l'agent puisse passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage, il faut que le graphe contienne une chaîne eulérienne ; pour cela, il faut que le graphe admette 0 ou 2 sommets de degrés impairs.

   On cherche les degrés des sommets du graphe :

Sommet	A	B	C	D	E	F	H
Degrés	4	2	4	3	4	3	2

   Il n'y a que deux sommets de degrés impairs – D et F – donc ce graphe admet des chaînes eulériennes qui partent de D pour arriver à F, ou qui partent de F pour arriver à D.

   Le gardien peut donc passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chacun des 11 passages ; exemple de trajet : D - C - B - A - C - E - A - F - E - D - H - F

3. On range les 7 sommets par ordre alphabétique : A - B - C - D - E - F - H

La matrice d'adjacence M associée au graphe est une matrice carrée d'ordre 7, ne contenant que des 0 et des 1. Si une arête relie le sommet numéro i $(1 \leqslant i \leqslant 7)$ au sommet numéro j $(1 \leqslant j \leqslant 7)$, on mettra un 1 à la ligne i et la colonne j de la matrice ; sinon on mettra un 0.

La matrice d'adjacence est donc :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

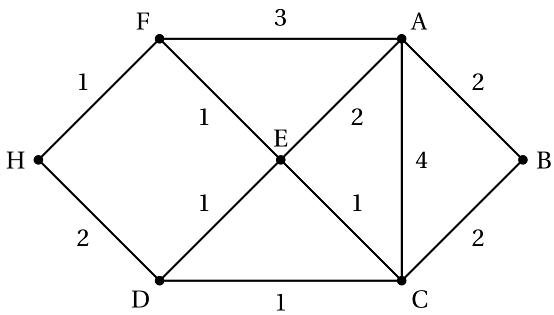
On donne :
$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

La matrice M^4 donne le nombre de chemins de longueur 4 entre tous les sommets. Le sommet B est le numéro 2, le sommet H le numéro 7 ; le nombre de chemins de longueur 4 allant de B à H est le nombre situé dans la matrice à la ligne 2 et la colonne 7.

Il y a donc 6 chemins de longueur 4 allant de B vers H.

5.

On a indiqué sur le graphe ci-contre le temps en minutes mis pour passer entre les différentes salles en ouvrant et fermant les portes à clé.



À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, on va déterminer le temps minimal pour aller de B à H.

B	A	C	D	E	F	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	B
	2 (B)	2 (B)	∞	∞	∞	∞	A (B)
		2 (B) ~~6 (A)~~	∞	4 (A)	5 (A)	∞	C (B)
			3 (C)	~~4 (A)~~ 3 (C)	5 (A)	∞	D (C)
				3 (C) ~~4 (D)~~	5 (A)	5 (D)	E (C)
					~~5 (A)~~ 4 (E)	5 (D)	F (E)
						5 (D) 5 (F)	H (D)

Le temps minimal pour aller de B à H est de 5 minutes ; le trajet correspondant est :

$$\text{B} \xrightarrow{2} \text{C} \xrightarrow{1} \text{D} \xrightarrow{2} \text{H}$$

L'algorithme donne un autre trajet durant 5 minutes : $\text{B} \xrightarrow{2} \text{C} \xrightarrow{1} \text{E} \xrightarrow{1} \text{F} \xrightarrow{1} \text{H}$

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** u étant une fonction dérivable sur un intervalle, la dérivée de la fonction e^u sur cet intervalle est $u'\mathrm{e}^u$.
On a donc $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$

b.

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5} = 0 \iff \mathrm{e}^{-x+0,5} = 1 \iff -x + 0,5 = 0 \iff x = 0,5.$$

c.

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5} > 0 \iff \mathrm{e}^{-x+0,5} < 1 \iff -x + 0,5 < 0 \iff x > 0,5.$$

f' est donc négative sur [0 ; 0,5] et positive sur [0,5 ; 5].

d.

x	0		$0,5$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$1+\mathrm{e}^{0,5}$	$\searrow$	$2,5$	$\nearrow$	$6+\mathrm{e}^{-4,5}$

2. **a.**

$$2 \leqslant \alpha \leqslant 2,5.$$

b. Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui sont en dessous de la droite Δ. $\mathscr{S} = [\alpha\ ;\ 5]$.

Partie B Application

1. **a.** On utilise la valeur pour laquelle le minimum de la fonction f est atteint. Il faut produire 50 cartes pour que le coût d'utilisation de la machine soit minimal.

b.

$$B(x) = 1,5x - f(x) = 1,5x - (x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0,5} = 0,5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}.$$

2. **a.**

$$B'(x) = 0,5 + \mathrm{e}^{-x+0,5}.$$

Une exponentielle est toujours positive, donc B' est strictement positive sur [0 ; 5] donc B est strictement croissante sur [0 ; 5].

b. $B(0) = -1 - \mathrm{e}^{0,5} < 0$ et $B(5) = 1,5 - \mathrm{e}^{-4,5} > 0$.

La fonction B est continue et strictement croissante sur [0 ; 5]. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, le nombre 0 admet un et un seul antécédent par B sur [0 ; 5] et donc l'équation donnée a une et une seule solution β.

D'après la calculatrice $B(2,32) < 0$ et $B(2,33) > 0$. Donc $2,32 < \beta < 2,33$.

3. L'entreprise réalise un bénéfice pour une quantité de cartes produites supérieure ou égale à 233.