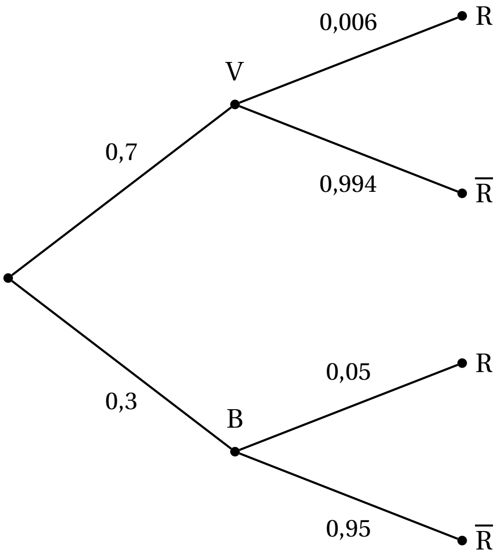
Baccalauréat S Liban 27 mai 2014

CORRECTION

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1.



2. D'après l'arbre ci-dessus $p(V \cap R) = 0,7 \times 0,006 = 0,0042$.

3. D'après l'arbre ci-dessus, la probabilité de l'évènement R est

$$p(R) = p(V \cap R) + p(B \cap R) = 0,0042 + 0,3 \times 0,05 = 0,0192$$

4. On cherche à déterminer $p_R(B)$:

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,0192} = 0,78125$$

Partie B : le vélo

1. Cela revient à calculer $p(15 \leqslant T \leqslant 20)$. À la calculatrice, nous obtenons, $p(15 \leqslant T \leqslant 20) = 0,946$

2. Il sera en retard au lycée si il met plus de 20 minutes pour effectuer le trajet. On cherche donc la probabilité de l'évènement « $T \geqslant 20$ ». À la calculatrice, nous obtenons

$$p(T \geqslant 20) = 0,0062$$

3. On cherche la durée maximale de son temps de parcours T_0 (en minutes) tel que $p\left(T \leqslant T_0\right) = 0{,}9$. À la calculatrice, nous obtenons

$$p\left(T \leqslant 18{,}5379\right) = 0{,}9$$

Ce qui signifie qu'il a une probabilité de $0,9$ de mettre moins de 18 minutes et 30 secondes (environ). Il peut donc partir au plus tard à 8 heures moins 18 minutes et 30 secondes, soit à 7 h 41 minutes et 30 secondes. À une minute près, il peut partir au maximum à 7 h 41, de sorte à avoir une probabilité d'arriver à l'heure de 0,9

Partie C : le bus

1. D'après le cours Z' suit une loi normale centrée-réduite.

2. Puisque $p\left(T' \geqslant 20\right) = 0{,}05$, il vient

$$p\left(\frac{T'-15}{\sigma'} \geqslant \frac{20-15}{\sigma'}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow p\left(Z' \geqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0{,}05$$

À la calculatrice, en considérant une loi normale centrée-réduite Z', on trouve que

$$p\left(Z' \geqslant 1{,}6449\right) = 0{,}05$$

D'où

$$\frac{5}{\sigma'} = 1{,}6449$$

et donc

$$\sigma' = \frac{5}{1{,}6449} = 3{,}04 \quad \text{à} \quad 0{,}01 \quad \text{près}$$

EXERCICE 2 (5 points)

Proposition 1 : VRAIE
Il suffit de vérifier que les coordonnées des deux points A et B vérifient le système formé des trois équations paramétriques.
Pour $t = 2$ on retrouve les coordonnées du point A, et pour $t = 1$ celles du point B.

Proposition 2 : VRAIE
$\mathscr{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ de coordonnées (2, 1, 3) et (AB) par $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées (−2, 1, 1).
Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{d} = -4+1+3 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{d}$ sont donc orthogonaux, les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont donc orthogonales.

Proposition 3 : FAUSSE
Pour savoir si ces deux droites sont coplanaires, il suffit de savoir si elles sont sécantes, car étant orthogonales elles ne pourront pas être parallèles.
Pour cela on résout le système

$$\begin{cases} 2t &= 5-2t' \quad (1)\\ 1+t &= -1+t' \quad (2)\\ -5+3t &= -2+t' \quad (3)\end{cases}$$

En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient $2t-6=-1$ soit $t = \dfrac{5}{2}$.
On remplace dans (2) : $t' = -2+t = -2+\dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$.
On vérifie dans (1) : $2t = 5$, alors que $5-2t' = 5-1 = 4$. Ce qui signifie que ce système n'a pas de solution.
Puisque ces deux droites sont orthogonales et non sécantes, elles seront donc non coplanaires.

Proposition 4 : FAUSSE
On vérifie facilement que $E \in \mathscr{P}$, mais $E \notin \mathscr{D}$.
En effet, si on résout le système

$$\begin{cases} 8 = 2t\\ -3 = 1+t\\ -4 = -5+3t\end{cases}$$

On trouve que $t = 4$ dans la première équation, valeur qui ne convient pas dans la seconde équation.

Proposition 5 : VRAIE
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (1, −1, 3) est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives (2, −1, −1) et (6, 0, −2), d'où

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2+1-3 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 6+0-6 = 0$$

$\overrightarrow{n}$ est donc normal au plan (ABC).
$\mathscr{P}$ et (ABC) ayant un vecteur normal commun sont donc parallèles.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$
   e^{-x} étant toujours strictement positif, $f'(x)$ sera du signe de $1-x$.
   Il s'ensuit que
   $$f'(x) \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad [0,\ 1] \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \quad \text{sur} \quad]1,\ +\infty[$$
   f est donc croissante sur $[0,\ 1]$ et décroissante sur $]1,\ +\infty[$.
2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, ce qui signifie que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$

Partie B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction qui à tout réel t de l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ associe l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Comme la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ alors
   $$\mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$
   et donc, pour tout $t \in [0;\ +\infty[\quad \mathscr{A}'(t) = f(t)$
   Comme f est positive sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ il s'ensuit que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur $[0\,;\ +\infty[$.
2. On peut en déduire que la fonction $\mathscr{A}$ a pour limite 1 en $+\infty$.
3. **a)** Dressons le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$ sur $[0\,;\ +\infty[$:

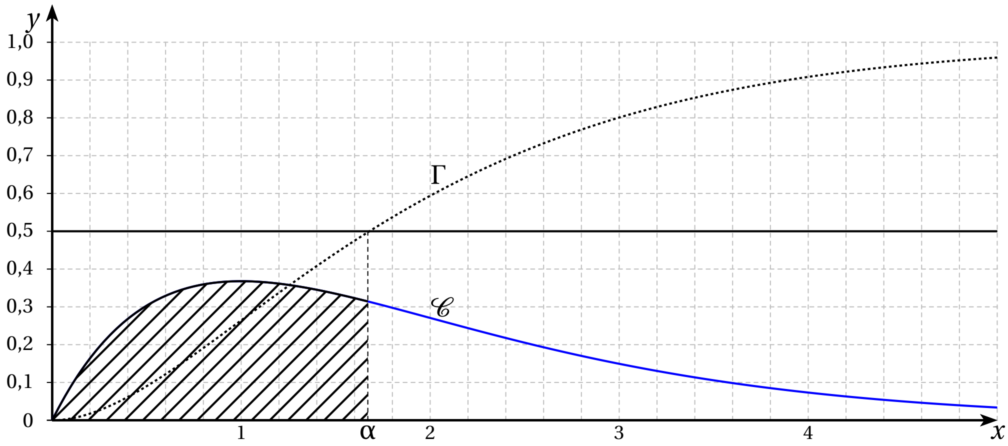
x	0	$+\infty$
$\mathscr{A}'$	$+$	
$\mathscr{A}$	0 $\nearrow$	1

   D'après ce tableau de variations l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$

   b) Sur le graphique ci-joint, on obtient $\alpha \simeq 1{,}7$
4. **a)** $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x}$

   b) On remarque que $g'(x) = -f(x)$, d'où
   $$\mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t -g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[-g(x)\right]_0^t = -g(t)+g(0) = 1-(1+t)\mathrm{e}^{-t}$$

c) $\mathscr{A}(6) = 1 - 7\text{e}^{-6} \simeq 0{,}98$



EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. $u_0 = |z_0| = \left|\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = 2$.
2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+\mathrm{i})z_n| = |1+\mathrm{i}| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \sqrt{2}u_n$
3. D'après le cours, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n$; (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} > 1$ et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers $+\infty$.
5.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	Tant que $u \leqslant p$ Faire
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$
		Fin du Tant Que
Sortie	:	Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1+\mathrm{i}) \times (\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$.
2. $z_0 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$

   $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

   $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.
3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

   D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Calculer $a_1 = 0{,}95$, $b_1 = 0{,}05$ et $c_1 = 0$.
2. **a)** 95% des individus restent sains d'un jour au jour suivant d'où

$$a_{n+1} = 0{,}95a_n$$

b) Au jour $n+1$, 5% des individus sains (a_n) deviennent malades (soit $0{,}05a_n$) et 80% des individus malades b_n le reste $(0{,}8b_n)$, d'où

$$b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}8b_n$$

3. **a)** Pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{A} \times \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95a_n \\ 0{,}05a_n + 0{,}08b_n \\ 0{,}2b_n + c_n \end{pmatrix} = \mathrm{U}_{n+1}$$

b) C'est vrai pour $n = 0$ car $\mathrm{D}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Supposons que $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$\mathrm{D}^{n+1} = \mathrm{D} \times \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est donc vrai au rang $n+1$
Par récurrence, cela sera vrai pour tout entier naturel n.

4. **a)** $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \times \mathrm{U}_0$, Soit

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n\right) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95^n \\ \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n\right) \end{pmatrix}$$

d'où

$$b_n = \frac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right)$$

b) (b_n) est la somme de deux suites géométriques de raisons comprises entre 0 et 1 qui convergent vers 0, il en est donc de même de (b_n).

c)

Variables	:	$b,\ b',\ x,\ y$ sont des réels k est un entier naturel
Initialisation	:	Affecter à b la valeur 0 Affecter à b' la valeur 0,05 Affecter à k la valeur 0 Affecter à x la valeur 0,95 Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	:	Tant que $b < b'$ faire : | Affecter à k la valeur $k+1$ | Affecter à b la valeur b' | Affecter à x la valeur $0{,}95x$ | Affecter à y la valeur $0{,}80y$ | Affecter à b' la valeur $\dfrac{1}{3}(x-y)$ Fin Tant que
Sortie	:	Afficher k

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7^e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8^e passage éventuel dans la boucle Tant que	8	0,1652	0,6302	0,1342	0,1653	VRAI
Après le 9^e passage éventuel dans la boucle Tant que	9	0,1653	0,5987	0,1073	0,1637	FAUX

Pour chaque ligne du tableau, b désigne b_k et b' désigne b_{k+1} ; on a donc :

k	7	8	9	10
b_k	0,1628	0,1652	0,1653	0,1637

Le rang du jour où le pic épidémique est atteint est donc le 9.