Correction du baccalauréat ES/L Métropole 20 juin 2014

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. **c.**
   $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
2. **c.**
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}3 + (1 - 0{,}6) \times 0{,}2 = 0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}26$
3. **c.**
   La fonction F est une primitive de la fonction f, donc f est la dérivée de F. D'après le tableau de variations de f, $f(x) < 0$ sur $[4\,;\,12]$, donc la fonction F est décroissante sur cet intervalle.
4. **d.**
   $\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2 \iff \ln(x(x+3)) = \ln 2^3 \iff \ln(x^2+3x) = \ln 8 \iff x^2 + 3x = 8$
5. **a.**
   La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{5}{x}$ a pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction $G : x \longmapsto 5\ln x$.
   L'aire est égale à $\displaystyle\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x = G(6) - G(2) = 5\ln 6 - 5\ln 2 = 5(\ln 6 - \ln 2)$

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. $u_0 = 1500$; d'une année sur l'autre, 20 % de la surface engazonnée est détruite, donc il en reste 80 %, soit $0{,}80 \times u_0 = 1200$.
   On rajoute 50 m² de gazon, il y en aura donc $1200 + 50 = 1250$: $u_1 = 1250$.
2. La surface engazonnée l'année $2010 + n$ est u_n et la surface engazonnée l'année $2010 + (n+1)$ est u_{n+1}. Or tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite, donc il en reste 80 %, soit $0{,}8u_n$.
   On rajoute 50 m² de gazon chaque année donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par : $v_n = u_n - 250$; donc $u_n = v_n + 250$.

   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0{,}8u_n + 50 - 250 = 0{,}8(v_n + 250) - 200 = 0{,}8v_n + 200 - 200 = 0{,}8v_n$
   $v_0 = u_0 - 250 = 1500 - 250 = 1250$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = 1250$.

   b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 1250 \times 0{,}8^n$.
   Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 250$, on en déduit que $u_n = 250 + 1250 \times 0{,}8^n$.

   c. La surface de terrain engazonné au bout de 4 années est $u_4 = 250 + 1250 \times 0{,}8^4 = 762$ m².

4. **a.** On résout l'inéquation $250 + 1250 \times 0{,}8^n < 500$:

$$
\begin{aligned}
250 + 1250 \times 0{,}8^n < 500 &\iff 1250 \times 0{,}8^n < 250 \\
&\iff 0{,}8^n < \frac{250}{1250} \\
&\iff 0{,}8^n < 0{,}2 \\
&\iff \ln 0{,}8^n < \ln 0{,}2 && \text{(croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}_+^*) \\
&\iff n\ln 0{,}8 < \ln 0{,}2 && \text{(propriété de la fonction ln)} \\
&\iff n > \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}8} && (\ln 0{,}8 < 0)
\end{aligned}
$$

   Or $\dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}8} \approx 7{,}2$ donc la plus petite valeur de n telle que $250 + 1250 \times 0{,}8^n < 500$ est $n = 8$.
   C'est donc à partir de la 8e année que la surface engazonnée sera inférieure à 500 m².
   On peut vérifier que $u_7 \approx 512$ *et que* $u_8 \approx 460$.

   b. On complète l'algorithme pour obtenir le résultat de la question précédente :

```
Initialisation   u prend la valeur 1 500
                 n prend la valeur 0
Traitement       Tant que u ⩾ 500 faire
                    u prend la valeur 0,8 × u + 50
                    n prend la valeur n + 1
                 Fin Tant que
Sortie           Afficher n
```

5. Pour tout n, $0{,}8^n > 0$ donc $1\,250 \times 0{,}8^n > 0$ et donc $250 + 1\,250 \times 0{,}8^n > 250 \iff u_n > 250$.
La surface engazonnée restera toujours supérieure à 250 m² donc Claude a raison.
Remarque : on peut démontrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers 250.

Exercice 3 — 5 points

Candidats ayant choisi la spécialité

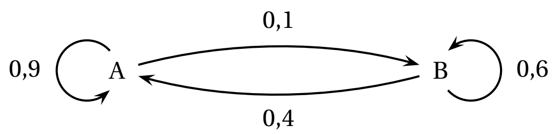
Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. a. On représente la situation à l'aide d'un graphe pondéré :



b. La matrice de transition M est la matrice 2×2 telle que pour tout n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
Donc $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

c. D'après le texte, Alice a autant de chance d'atteindre sa cible que de la manquer au premier lancer ; donc $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$ et donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
On sait que $P_2 = P_1 \times M$
donc $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \times 0{,}9 + 0{,}5 \times 0{,}4 & 0{,}5 \times 0{,}1 + 0{,}5 \times 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$

2. a. $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4b_n \\ b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}6b_n \end{array} \right.$

Donc, pour tout n, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4b_n$.

b. D'après le texte, on peut dire que pour tout n, $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$.

$$\left. \begin{array}{l} a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4b_n \\ b_n \quad = 1 - a_n \end{array} \right\} \Longrightarrow a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4(1 - a_n) \iff a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4 - 0{,}4a_n$$
$$\iff a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$$

3. a. On complète l'algorithme de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer :

Entrées	Saisir n
Traitement	a prend la valeur 0,5
	b prend la valeur 0,5
	Pour i allant de 2 à n
	a prend la valeur $0{,}5 \times a + 0{,}4$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie	Afficher a, b

b. On fait tourner l'algorithme pour $n = 5$:

n	a	b
1	0,5	0,5
2	0,65	0,35
3	0,725	0,275
4	0,7625	0,2375
5	0,78125	0,21875

Donc pour $n = 5$ l'affichage de cet algorithme est 0,781 25 et 0,218 75.

4. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = a_n - 0{,}8$; donc $a_n = u_n + 0{,}8$.
$u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5a_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5(u_n + 0{,}8) - 0{,}4 = 0{,}5u_n + 0{,}4 - 0{,}4 = 0{,}5u_n$
$u_1 = a_1 - 0{,}8 = 0{,}5 - 0{,}8 = -0{,}3$
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_1 = -0{,}3$.

b. On déduit de la question précédente que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0{,}3 \times 0{,}5^{n-1}$.
Comme $a_n = u_n + 0{,}8$, on peut dire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = 0{,}8 - 0{,}3 \times 0{,}5^{n-1}$.

c. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,5 ; or $0 \leqslant 0{,}5 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = u_n + 0{,}8$, donc la suite (a_n) est convergente et a pour limite 0,8.
À long terme, la probabilité qu'Alice atteigne la cible est égale à 0,8.

d. On aurait pu trouver le résultat précédent en essayant de déterminer un état stable, c'est-à-dire un couple $(a\,, b)$ de nombres de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tels que : $\left\{\begin{array}{l}\begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} \times M\\ a + b = 1\end{array}\right.$

Exercice 3 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité et L

Partie A

Chaque jour, Antoine s'entraine au billard américain pendant une durée comprise entre 20 minutes et une heure. On modélise la durée de son entrainement, en minutes, par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[20\,;\,60]$.

1. La probabilité p pour que l'entrainement dure plus de 30 minutes est :

$$P(30 < X \leqslant 60) = \frac{60-30}{60-20} = \frac{30}{40} = 0{,}75$$

2. L'espérance de X est $\dfrac{20+60}{2} = 40$.
Cela signifie que le temps moyen d'entrainement d'Antoine est de 40 minutes.

Partie B

Les boules de billard américain avec lesquelles Antoine s'entraine sont dites de premier choix si leur diamètre est compris entre 56,75 mm et 57,25 mm ; sinon elles sont dites de second choix.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre, en millimètres. On suppose que D suit la loi normale d'espérance 57 et d'écart-type 0,11.

1. La probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57 mm est $P(X < 57)$.
Comme 57 est l'espérance de la loi normale suivie par X, $P(X < 57) = 0{,}5$.
La probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57 mm est 0,5.
2. La probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix est $P(56{,}75 \leqslant X \leqslant 57{,}25)$.
Avec une calculatrice, on trouve $P(56{,}75 \leqslant X \leqslant 57{,}25) \approx 0{,}977$.
La probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix est, à 10^{-3} près, de 0,977.
3. L'évènement « la boule prélevée est de second choix » est l'évènement contraire de « la boule prélevée est de premier choix » ; donc $p_3 = 1 - p_2 \approx 1 - 0{,}977 \approx 0{,}023$.
La probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix est, à 10^{-3} près, de 0,023.

Partie C

Le président de la fédération française de billard (FFB) souhaite estimer le niveau de satisfaction de ses 14 000 licenciés quant à l'organisation des tournois.

Antoine estime que les 80 adhérents de son club constituent un échantillon représentatif des licenciés de la FFB. Il est chargé de faire une étude au sein de son club : les 80 adhérents ont répondu, et 66 ont déclaré qu'ils étaient satisfaits.

1. Sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB est $\dfrac{66}{80} = 0{,}825$.
2. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est donné par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}825 - \frac{1}{\sqrt{80}}\,;\, 0{,}825 + \frac{1}{\sqrt{80}}\right] \approx [0{,}713\,;\, 0{,}937]$$

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang. On obtient la courbe fournie en annexe.

A. Étude graphique

1. La courbe passe par le point de coordonnées $(0\,;\,2)$ donc la concentration à l'instant initial est de 2 grammes par litre.
2. On cherche les durées pour lesquelles la concentration est supérieure ou égale à 0,4, autrement dit l'intervalle pour lequel la courbe est au-dessus de la droite d'équation $y = 0{,}4$: il s'agit de l'intervalle $[0\,;\,6]$.

B. Étude théorique

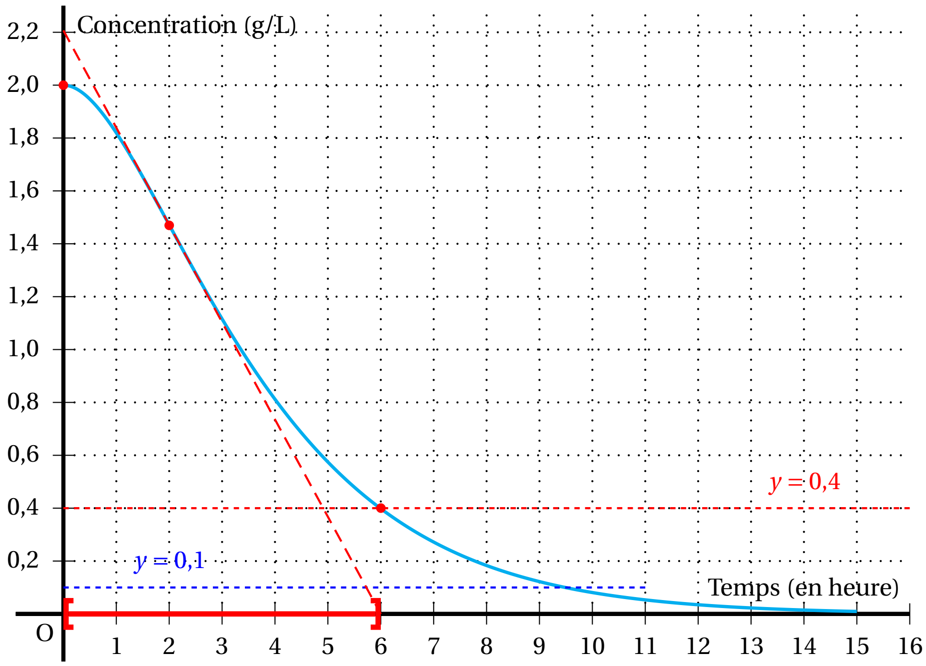
La concentration en fonction du temps, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,15]$ par :

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$$

1. La fonction f est dérivable et d'après la formule de dérivation d'un produit :
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-0{,}5x} + (x+2)(-0{,}5)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} = \mathrm{e}^{-0{,}5x} - 0{,}5x\mathrm{e}^{-0{,}5x} - \mathrm{e}^{-0{,}5x} = -0{,}5x\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.
Sur $]0\,;\,15]$, $x > 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}5x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,15]$.
$f(15) \approx 0{,}009$, d'où le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,15]$:

x	0	15
$f(x)$	2 $\searrow$	0,009

2. On complète le tableau de variation de f :



x	0	α	15
$f(x)$	2	0,1	0,009

D'après ce tableau de variation, on peut dire que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;15]$; on appelle α cette solution.

3. $\left.\begin{array}{l} f(9) \approx 0,12 > 0,1 \\ f(10) \approx 0,08 < 0,1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [9;10]$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(9,4) \approx 0,104 > 0,1 \\ f(9,5) \approx 0,099 < 0,1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [9,4;9,5]$

4. Un logiciel de calcul formel donne trois résultats.
La ligne 1 donne la valeur de la dérivée première : $f'(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} - 0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x}(x+2)$.
La ligne 2 donne la valeur de la dérivée seconde : $f''(x) = -\mathrm{e}^{-0,5x} + 0,25\,\mathrm{e}^{-0,5x}(x+2)$.
La ligne 3 donne la forme factorisée de $f''(x)$: $f''(x) = (0,25x - 0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.
Une fonction est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée première est croissante, donc sur les intervalles sur lesquels sa dérivée seconde est positive ; sinon elle est concave.
On résout donc dans $[0;15]$ l'inéquation $f''(x) > 0$ qui équivaut à $(0,25x - 0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x} > 0 \iff 0,25x - 0,5 > 0$ car $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ sur $\mathbb{R}$.
$f''(x) > 0 \iff 0,25x - 0,5 > 0 \iff x > 2$
La fonction f est donc convexe sur $[2;15]$ et concave sur $[0;2]$.
De plus $f''(x) = 0 \iff x = 2$ donc la courbe admet le point d'abscisse 2 comme point d'inflexion.

C. Interprétation des résultats

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre.
Le médicament est actif à peu près pendant 9 h 30 (voir figure).

2. La baisse de concentration ralentit au bout de 2 heures (abscisse du point d'inflexion).