

## Correction du sujet Métropole juin 2010

### Exercice I

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln(e^x) = x$  donc  $\ln(e^{-3}) = -3$ .

-3 est solution de l'équation  $\ln(e^x) = -3$ .

2.  $f(x) = \frac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3}$  : c'est une fraction rationnelle, donc sa limite à l'infini est celle du quotient de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{(2x)^3}; \text{ or, pour } x \neq 0, \frac{-2x^3}{(2x)^3} = \frac{-2x^3}{8x^3} = -\frac{1}{4}.$$

Par conséquent :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$ .

3. Soit  $f(x) = 3 \ln x - 2x + 5$ .

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse  $a$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  est :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

$$a = 1 : f(a) = f(1) = 3.$$

Pour tout  $x$ ,  $f'(x) = \frac{3}{x} - 2$  donc  $f'(1) = 1$ .

L'équation de la tangente est alors :  $y = 1(x - 1) + 3$ , c'est-à-dire :  $y = x + 2$ .

4. Soit  $X$  le gain algébrique du jeu.  $X$  peut prendre les valeurs 7, -2 et -3. Comme le dé est équilibré, on a facilement :

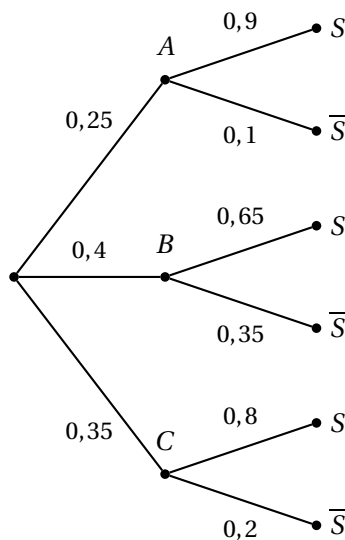
$$p(X = 7) = \frac{1}{6}; p(X = -2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } p(X = -3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Le gain moyen est l'espérance de  $X$  :  $E(X) = \sum_i x_i \times p(X = x_i) = 7 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{3} + (-3) \times \frac{1}{2} = -1$ .

Le gain moyen est -1.

### Exercice II (obligatoire)

1. Arbre :



2. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :  $p(A \cap S) = p_A(S) \times p(A) = 0,25 \times 0,9 = 0,225$ .  $p(A \cap S) = 0,225$

3.  $S = (S \cap A) \cup (S \cap B) \cup (S \cap C)$ , qui est une réunion d'événements incompatibles.

Par conséquent :  $p(S \cap A) + p(S \cap B) + p(S \cap C) = p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(B) + p_C(S) \times p(C)$  (formule des probabilités totales)

$$= 0,9 \times 0,25 + 0,65 \times 0,4 + 0,8 \times 0,35 = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">0,765.$$

4. On a :  $p_S(C) = \frac{p(S \cap C)}{p(S)} = \frac{0,8 \times 0,35}{0,765} = \frac{56}{153} \approx 0,366$ .  $p_S(C) = \frac{56}{153} \approx 0,366$

### Exercice II (spécialité)

Soit  $F(x; y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$ .

1. 120 et 160 correspondent respectivement à  $x = 1,2$  et  $y = 1,6$ .

$F(1,2; 1,6) = 1,2^2 - 2 \times 1,2 + 1,6^2 - 4 \times 1,6 + 6 = 12$  donc le coût de production mensuel est de 12 000 euros.

2. **Première méthode (vérification)**

Pour tous  $x$  et  $y$ ,  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 1 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = F(x; y)$ .

**Deuxième méthode :**  $F(x; y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = [(x^2 - 2x + 1) - 1] + [(y^2 - 4y + 4) - 4] + 6 = [(x-1)^2 - 1] + [(y-2)^2 - 4] + 6 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$ .

Le carré d'un nombre réel est positif, donc, pour tout  $x$  et pour tout  $y$ ,  $(x-1)^2 \geq 0$  et  $(y-2)^2 \geq 0$ .

On en déduit :  $F(x; y) \geq 1$  avec  $F(x; y) = 1$  pour  $x = 1$  et  $y = 2$ .

**Le coût mensuel minimum de fabrication est de 10 000 euros, pour 100 sièges de luxe et 200 sièges de confort fabriqués.**

3. (a) Si la fabrication est de 250 sièges, on a :  $x + y = 2,5$  donc  $y = 2,5 - x$ .

Le coût mensuel de production, sous ces conditions, est de :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = (x-1)^2 + (2,5-x-2)^2 + 1 = (x-1)^2 + (0,5-x)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 0,25 - x + x^2 + 1 = 2x^2 - 3x + 2,25$$

(b) On pose  $f(x) = 2x^2 - 3x + 2,25$ .

$f$  est dérivable et  $f'(x) = 4x - 3$ .

$f'(x) = 0$  équivaut à  $x = \frac{3}{4} = 0,75$ .

$f'(x) < 0$  pour  $4x - 3 < 0$  donc pour  $x < 0,75$ .

On en déduit le tableau de variations sur  $[0; 2,5]$  :

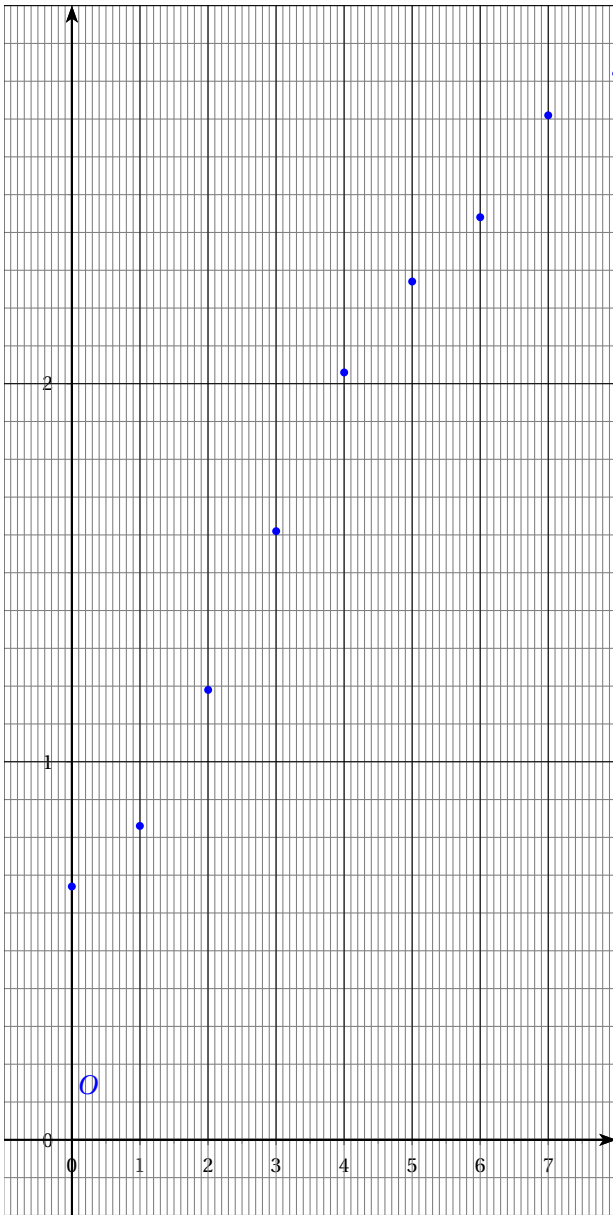
$x$	0	0,75	2,5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

**Le coût mensuel de fabrication est minimum pour  $x = 0,75$  centaines, c'est-à-dire 75 sièges de luxe fabriqués et  $y = 2,5 - 0,75 = 1,75$  centaine, soit 175 sièges de confort fabriqués.  
Le coût minimum correspondant est alors de 11 250 euros.**

## Exercice III

### Partie A : Observation des données

#### 1. Nuage de points :



$$2. \frac{8,82 - 6,67}{6,67} \times 100 \approx 32,23.$$

Le pourcentage d'augmentation entre 2001 et 2009 est environ de **32,23%**.

3. Soit  $t$  le taux moyen annuel d'augmentation entre 2001 et 2005.

On a alors :  $6,67(1+t)^4 = 8,03$  donc

$$(1+t)^4 = \frac{8,03}{6,67}, \text{ qui donne :}$$

$$1+t = \left(\frac{8,03}{6,67}\right)^{\frac{1}{4}}, \text{ d'où :}$$

$$t = \left(\frac{8,03}{6,67}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx \mathbf{4,75\%}.$$

### Partie B : estimation par un ajustement exponentiel

On estime la valeur en 2005+n su SMIC horaire brut à  $8,03 \times 1,024^n$ .

1. 2012 correspond à  $n = 7$ ; une estimation du SMIC en 2012 sera alors :  $8,03 \times 1,024^7 \approx 9,48$ .

**Il sera de 9,48 euros.**

2.  $8,03 \times 1,024^n \geq 10$  équivaut à  $1,024^n \geq \frac{10}{8,03}$  d'où :

$$n' \ln(1,024) \geq \ln\left(\frac{10}{8,03}\right).$$

$$\text{On en déduit : } n \geq \frac{\ln\left(\frac{10}{8,03}\right)}{\ln(1,024)} \approx 9,2.$$

**Il faudra attendre 10 ans pour que le SMIC atteigne avec cette estimation un montant supérieur à 10 euros, c'est-à-dire 2015.**

## Exercice IV

La fonction d'offre est définie par  $f(x) = 153e^{0,05x}$  et la fonction de demande par  $g(x) = -116\ln(x+1) + 504$ .

1. (a) La fonction linéaire  $x \mapsto 0,05x$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  (le coefficient directeur 0,05 est positif) ; la fonction exp est croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc par composition, la fonction  $x \mapsto e^{0,05x}$  est croissante (la composée de deux fonctions croissantes est croissante). En multipliant par 153, nombre positif, on obtient encore une fonction croissante.

**f est croissante**

(sinon, on calcule  $f'(x) = 153 \times 0,05e^{0,05x} > 0$ )

(b) Le fonction  $x \mapsto x+1$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs strictement positives sur  $[0; 35]$  ; la fonction ln est croissante sur  $]0; +\infty[$ , donc, par composition, la fonction  $x \mapsto \ln(x+1)$  est croissante sur  $[0; 35]$ .

-116 est négatif, donc la fonction  $x \mapsto -116\ln(x+1)$  est décroissante, et **g est donc décroissante.**

(sinon, on calcule la dérivée :  $g'(x) = -116 \times \frac{1}{x+1} = -\frac{116}{x+1} < 0$ ).

(c) Graphiquement, on trouve que les coordonnées de E sont approximativement : **E(9 ; 240)**.

2. L'abscisse  $x$  de  $E$  est solution de l'équation  $f(x) = g(x)$ , donc de  $h(x) = 0$  avec  $h(x) = f(x) - g(x)$ .
- (a)  $h = f - g = f + (-g)$ . Comme  $g$  est décroissante sur  $[0; 35]$ ,  $-g$  est croissante sur le même intervalle et  $h$  est **croissante** sur cet intervalle, comme somme de deux fonctions croissantes.
- (b) •  $h$  est **continue** sur  $[0; 35]$  comme somme et composée de fonctions continues.  
 •  $h(0) = 153 - 504 = -351 < 0$ .  
 •  $h(35) \approx 792 > 0$
- D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation  $h(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[0; 35]$ . Comme  $h$  est croissante, cette solution est unique. On la note  $x_0$ .
- (c) À la calculatrice, on trouve :  $x_0 \approx 8,871$ , à 0,001 près par excès.
- (d)  $y_0 = f(x_0) \approx 153e^{0,05 \times 8,871} \approx 2,38,41$ ;  $y_0 \approx 238,41$ .
- (e) **Le prix unitaire d'équilibre est de 238,41 euros, pour une quantité disponible de 8 871 objets.**

3. Pour trouver une primitive de  $f$ , on cherche à faire apparaître une expression du type  $u'e^u$ , avec  $u(x) = 0,05x$  et  $u'(x) = 0,05$ .

$$f(x) = 153e^{0,05x} = \frac{153}{0,05} \times 0,05e^{0,05x} = \frac{153}{0,05} u'(x)e^{u(x)}.$$

On en déduit qu'une primitive  $F$  de  $f$  est définie par :  $F(x) = \frac{153}{0,05} e^{0,05x}$  :  **$F(x) = 3060e^{0,05x}$** .

4. Le surplus est  $S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx$ .

$x_0 \times y_0$  représente l'aire du rectangle construit sur l'intervalle  $[0; x_0]$  et de hauteur  $y_0$  (ordonnée de  $E$ ).

Le surplus est donc l'aire comprise entre la droite d'équation  $y = y_0$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = x_0$  (voir partie hachurée sur le graphique ci-dessous).

$$\int_0^{x_0} f(x) dx = F(x_0) - F(0) = 3060e^{x_0} - 3060 = 3060(e^{x_0} - 1).$$

Par conséquent :  $S = x_0 y_0 - 3060(e^{x_0} - 1) \approx 406,7$ .

**Courbe de l'exercice IV**

