

## Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

### EXERCICE 1

4 points

1.a.  $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$  donc la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{1}{3}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$ .

1.b. Donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on a  $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ . Or  $v_n = u_n - 6$  donc  $u_n = v_n + 6$  et on obtient bien  $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$

1.c.  $\frac{1}{3} \in ]-1; 1[$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  et donc on en déduit facilement que la suite  $(u_n)$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$

2.a. Appliquons la formule de récurrence définissant  $(w_n)$  pour  $n = 10$  :

$$10w_{10} = 11w_9 + 1 \text{ donc } 10w_{10} = 11 \times 19 + 1 = 210 \text{ donc } w_{10} = 21$$

2.b. On conjecture que la suite  $(w_n)$  est arithmétique de raison  $r = 2$  et de premier terme  $w_0 = 1$ , autrement dit que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on a  $w_n = 2n + 1$ . Démontrons-le par récurrence sur  $n$  : notons  $\mathcal{P}_n$  la proposition «  $w_n = 2n + 1$  ».

• Initialisation :  $w_0 = 1$  et  $2 \times 0 + 1 = 1$  donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

• Hérédité : Soit  $n$  un entier quelconque dans  $\mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}_n$  vraie. On sait que  $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$ . Or par hypothèse de récurrence, on sait que  $w_n = 2n + 1$  donc  $(n+1)w_{n+1} = (n+2)(2n+1) + 1 = 2n^2 + 5n + 3 = (2n+3)(n+1)$ . Or  $n+1 \neq 0$  donc on en déduit que  $w_{n+1} = 2n+3 = 2(n+1) + 1$  et donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. Ainsi, la proposition  $\mathcal{P}_n$  est héréditaire.

• Conclusion : par le principe de récurrence, la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , à savoir que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $w_n = 2n + 1$  d'où  $w_{2009} = 4019$

### EXERCICE 2

6 points

I.1. D'après le cours,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc par passage à l'inverse, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + xe^{-x} = 1$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + xe^{-x}) = \ln(1) = 0$  par continuité de la fonction  $\ln$  en 1. On a donc bien  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

I.2. Posons  $u(x) = 1 + xe^{-x}$  pour tout  $x$  dans  $[0; +\infty[$ . La fonction  $u$  est clairement dérivable sur  $[0; +\infty[$  et pour tout  $x$  dans  $[0; +\infty[$ , on a :

$$u'(x) = 0 + 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

On sait que  $e^{-x} > 0$ . D'autre part,  $x \geq 0$  donc  $xe^{-x} \geq 0$  donc  $u(x) \geq 1 > 0$ . La fonction  $u$  est dérivable et strictement positive sur  $[0; +\infty[$  donc d'après le cours,  $f = \ln \circ u$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et pour tout  $x$  dans  $[0; +\infty[$ , on a :

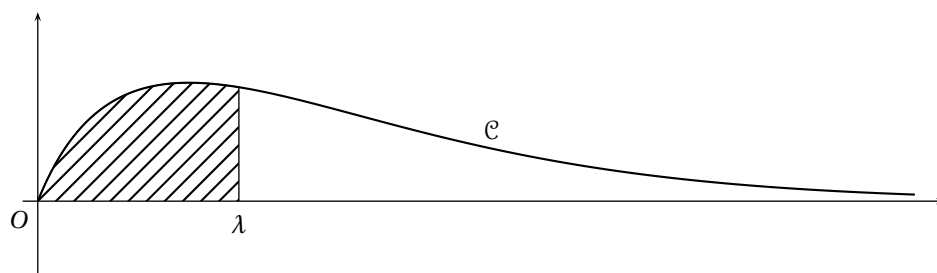
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{(1-x)e^{-x}}{1+xe^{-x}}$$

On sait que  $e^{-x} > 0$  et  $u(x) = 1 + xe^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est bien du signe de  $1-x$ .

I.3. Par suite,  $f'(x) > 0$  si  $x \in [0; 1[$ ,  $f'(1) = 0$  et  $f'(x) < 0$  si  $x \in ]1; +\infty[$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$  puis strictement décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

II.1.a. Représentation graphique de  $A(\lambda)$  :

La fonction  $f$  est continue et positive sur  $[0; +\infty[$  donc l'intégrale  $A(\lambda)$  désigne l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation  $x = 0$  et  $x = \lambda$  :



**II.1.b.** D'après la question **I.3.** on sait que  $f$  présente un maximum en  $x = 1$  donc pour tout  $x$  dans  $[0; +\infty[$ ,  $f(x) \leq f(1)$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que  $\int_0^\lambda f(x) dx \leq \int_0^\lambda f(1) dx$ , soit  $A(\lambda) \leq \lambda \times f(1)$  (c'est évident géométriquement!)

**II.2.a.** On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^{-x} & u(x) &= -e^{-x} \\ v(x) &= x & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^\lambda x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} + \int_0^\lambda e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} + [-e^{-x}]_0^\lambda$$

$$\text{donc finalement } \boxed{\int_0^\lambda x e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1}$$

**II.2.b.** On sait que pour tout  $x$  dans  $[0; +\infty[$ ,  $x e^{-x} \geq 0$  donc  $\ln(1 + x e^{-x}) \leq x e^{-x}$ . Par croissance de l'intégrale (les fonctions sont bien continues sur  $[0; \lambda]$ ), on obtient :

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \ln(1 + x e^{-x}) dx \leq \int_0^\lambda x e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.$$

**II.3.** Pour  $\lambda = 5$ , une calculatrice donne  $\lambda \times f(1) \approx 1,57$  et  $-\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 \approx 0,96$ . C'est donc la deuxième méthode qui donne le meilleur majorant dans le cas  $\lambda = 5$  :

$$\boxed{A(\lambda) \leq 0,96}$$

## EXERCICE 3

5 points

$$\text{I. } \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \quad \square$$

II.1.a. Les jetons sont indiscernables au toucher donc on peut légitimement supposer qu'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Il y a  $\binom{10}{2}$  manières de choisir 2 jetons parmi 10 et il y a  $\binom{7}{2}$  manières de choisir 2 jetons blancs parmi les 7 jetons blancs. Donc

$$p(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}.$$

II.1.b. De même, 6 jetons portent des numéros impairs donc  $p(B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$ .

II.1.c. De même, 4 jetons blancs portent des numéros impairs donc  $p(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$ . Ainsi,  $p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$  alors que  $p(A \cap B) = \frac{2}{15} = \frac{6}{45}$  donc  $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$  donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.

II.2.a. La variable aléatoire  $X$  peut valoir 0, 1 ou 2.

$$p(X=0) = \frac{\binom{7}{0} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15},$$

$$p(X=1) = \frac{\binom{7}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15},$$

$$p(X=2) = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}. \text{ D'où :}$$

$k$	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

II.2.b.  $E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{7}{5}$  :  $E(X) = \frac{7}{5}$

## EXERCICE 4

5 points (obligatoire)

1.a.  $OM = |z|$  et  $OM_1 = \left| \frac{1}{z} \right|$  donc  $OM \times OM_1 = |z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = \left| z \times \frac{1}{z} \right| = |1| = 1$ .

D'autre part,  $(u; OM) = \arg(z) \quad [2\pi]$  et  $(u; OM_1) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$  donc on a bien  $(u; OM_1) = -(u; OM) \quad [2\pi]$ .

1.b. cf. figure.

2.a.  $z' = z_{M'} = \frac{z_M + z_{M_1}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$  donc on a bien  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$

2.b.  $z_{B'} = \frac{1}{2} \left( 2i + \frac{1}{2i} \right) = \frac{1}{2} \left( 2i - \frac{1}{2}i \right) = \frac{3}{4}i$  et de même on trouve  $z_{C'} = -\frac{3}{4}i$ .

2.c. cf. figure.

3. On a clairement les équivalences suivantes :

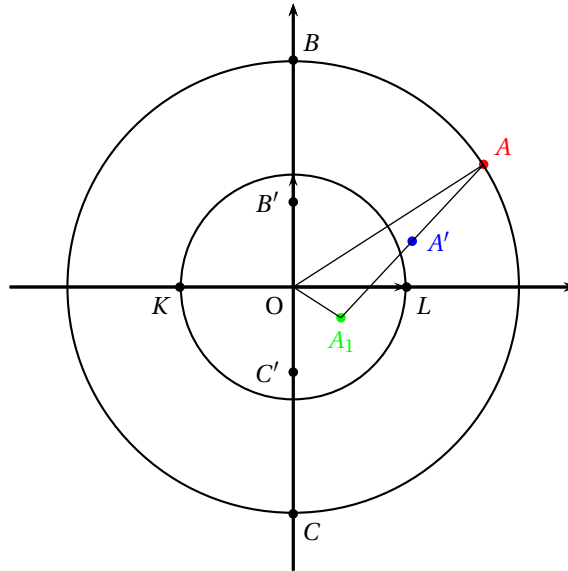
$$\begin{aligned} M = M' &\iff z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \\ &\iff 2z = z + \frac{1}{z} \\ &\iff z = \frac{1}{z} \\ &\iff z^2 = 1 \\ &\iff z = 1 \text{ ou } z = -1 \end{aligned}$$

Notons (en devançant l'énoncé)  $K$  et  $L$  les points d'affixes respectives  $-1$  et  $1$ . Alors l'ensemble des points  $M$  tels que  $M' = M$  est l'ensemble  $\{K; L\}$

4. Un point  $M$  d'affixe  $z$  appartenant au cercle de centre  $O$  et de rayon 1 vérifie  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Alors

$$z' = \frac{1}{2} \left( e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta), \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

ce qui montre bien que  $M'$  appartient au segment  $[KL]$ .



## EXERCICE 4

5 points (spécialité)

**1.a.** Le couple  $(x, y) = (1, 1)$  est une solution particulière évidente. L'équation  $(E)$  est donc équivalente à l'équation  $(E') : 8(x - 1) = 5(y - 1)$ .

• Soit  $(x, y)$  une solution de  $(E)$ .  $5 \mid 5(y - 1)$  donc  $5 \mid 8(x - 1)$ . Or  $5 \wedge 8 = 1$  donc d'après le théorème de Gauss,  $5 \mid x - 1$ . Soit donc  $k$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $x - 1 = 5k$ . Alors  $x = 1 + 5k$ . L'équation  $(E')$  donne alors  $8(5k) = 5(y - 1)$  donc  $8k = y - 1$  et  $y = 1 + 8k$ . Ainsi,  $(x, y)$  est solution de  $(E)$ , s'il existe  $k$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $x = 1 + 5k$  et  $y = 1 + 8k$ .

• Conclusion :  $S_{(E)} = \{(1 + 5k, 1 + 8k), k \in \mathbb{Z}\}$

**1.b.**  $8p - 5q = (m - 1) - (m - 4) = 3$  donc  $(p, q)$  est une solution de  $(E)$ . Par suite, il existe  $k$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $p = 1 + 5k$ , et donc  $m = 8p + 1 = 40k + 9$  donc on a bien  $m \equiv 9 \pmod{40}$

**1.c.** Ce nombre est bien sûr  $m_0 = 2009$ , pour lequel  $p_0 = 251$  et  $q_0 = 401$ .

**2.a.**  $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$  donc  $2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{7}$  :  $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$

**2.b.** Procédons à la division euclidienne de 2009 par 3 :  $2009 = 669 \times 3 + 2$  donc  $2^{2009} = (2^3)^{669} \times 2^2 \equiv 1 \times 4 \equiv 4 \pmod{7}$  donc le reste dans la division euclidienne de  $2^{2009}$  par 7 est  $4$ .

**3.a.**  $10 \equiv 3 \pmod{7}$  donc  $10^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$  donc  $10^3 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$ .

**3.b.**  $N$  est divisible par 7 ssi  $N \equiv 0 \pmod{7}$ . Cette équation est équivalente à  $a \times 10^3 + b \equiv 0 \pmod{7}$ , elle-même équivalente à  $-a + b \equiv 0 \pmod{7}$ , soit  $a \equiv b \pmod{7}$

$a = 1$  : la condition  $b \equiv 1 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 1$  ou  $b = 8$ . D'où  $N = 1001$  et  $N = 1008$ .

$a = 2$  : la condition  $b \equiv 2 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 2$  ou  $b = 9$ . D'où  $N = 2002$  et  $N = 2009$ .

$a = 3$  : la condition  $b \equiv 3 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 3$ . D'où  $N = 3003$ .

$a = 4$  : la condition  $b \equiv 4 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 4$ . D'où  $N = 4004$ .

$a = 5$  : la condition  $b \equiv 5 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 5$ . D'où  $N = 5005$ .

$a = 6$  : la condition  $b \equiv 6 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 6$ . D'où  $N = 6006$ .

$a = 7$  : la condition  $b \equiv 7 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 0$  ou  $b = 7$ . D'où  $N = 7000$  et  $N = 7007$ .

$a = 8$  : la condition  $b \equiv 8 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 1$  ou  $b = 8$ . D'où  $N = 8001$  et  $N = 8008$ .

$a = 9$  : la condition  $b \equiv 9 \pmod{7}$  avec  $b \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  donne  $b = 2$  ou  $b = 9$ . D'où  $N = 9002$  et  $N = 9009$ .