Correction Baccalauréat S Métropole juin 2011

Exercice n° 1 — 4 points

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

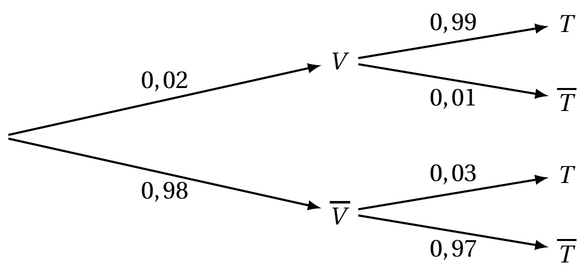
- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1(a) Valeurs des probabilités : $p(V) = 0,02$, $p_V(T) = 0,99$ et $p_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0,97$.
Arbre de probabilité.



(b) Probabilité de l'événement $V \cap T$:

$$p(V \cap T) = p_V(T) \times p(V) = 0,99 \times 0,02 = 0,0198$$

2. Probabilité que le test soit positif est :

$$p(T) = p(V \cap T) + p(\overline{V} \cap T) = p_V(T) \times p(V) + p_{\overline{V}}(T) \times p(\overline{V}) = 0,99 \times 0,02 + 0,03 \times 0,98 = 0,0492$$

3(a) « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de « chances » que la personne soit contaminée »correspond à la probabilité $p_T(V) \simeq 0,40$. Vérifions :

$$p_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \simeq 0,40243902439 \simeq 0,40$$

(b) Probabilité $p_{\overline{T}}(\overline{V})$ qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

$$p_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{p(\overline{T} \cap \overline{V})}{p(\overline{T})} = \frac{p_{\overline{V}}(\overline{T}) \times p(\overline{V})}{p(\overline{T})} = \frac{p_{\overline{V}}(\overline{T}) \times p(\overline{V})}{1 - p(T)} = \frac{0,97 \times 0,98}{1 - 0,0492} \simeq 0,9998$$

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. X suit une loi binomiale car
   - Il n'y a que deux issues : soit V, soit $\overline{V}$;
   - les tirages sont indépendants ;
   - $p = 0,02$
   - $n = 10$
2. Probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10 :

$$p(X \geqslant 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{0}{10} 0,02^{10} \times 0,98^{0} - \binom{1}{10} 0,02^{9} \times 0,98^{1} \simeq 1$$

Exercice n° 2 — 4 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1$, $z_B = \mathrm{i}$, $z_C = -1$, $z_C = -\mathrm{i}$.

1. Affixe de l'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

   Écriture de la rotation :

$$z' - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - z_A) \Longleftrightarrow z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 1) + 1$$

   L'affixe de E est donc :

$$z_E = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\mathrm{i} - 1) + 1 = -\frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \boxed{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - \mathrm{i})}$$

2. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z + \mathrm{i}| = |z - 1|$ vérifie :

$$|z + \mathrm{i}| = |z - 1| \Longleftrightarrow MD = MA \Longleftrightarrow \boxed{M \in \text{ médiatrice de } [AD]}$$

   ⚠ **: Or, d'après la configuration donnée, c'est aussi la médiatrice du segment $[BC]$.**

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur vérifie :

$$\frac{z+\mathrm{i}}{z+1} \in \mathrm{i}\mathbb{C} \Longleftrightarrow \arg\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z+1}\right) = \left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MD}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Longleftrightarrow \boxed{M \in (\text{cercle de diamètre } [CD] - \{C\})}$$

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ vérifie :

$$\arg(z-\mathrm{i}) = \left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right) = -\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Longleftrightarrow \boxed{M \in]BD)}$$

Exercice n° 3 — 7 points

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

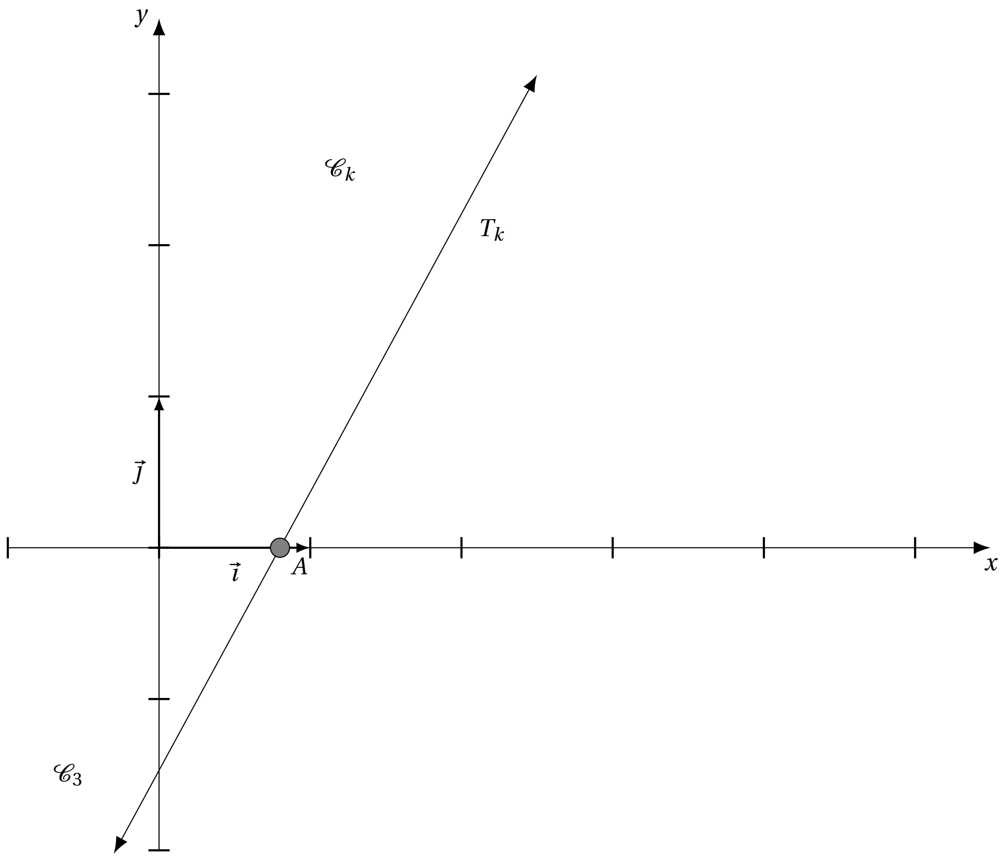
$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\ ;\ 0\right)$.



1(a) Limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} x \times \frac{1}{\mathrm{e}^x} = -\infty,\ \text{car} \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0,\ \text{car} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

(b) Variations de la fonction f_1 :

$$f_1'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1-x}{\mathrm{e}^x} \text{ a même signe que } 1-x$$

Tableau de variations de f_1 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

(c) Sur le graphique, la courbe $\mathscr{C}_k$ est située au dessus de l'axe des abscisses. Donc pour x compris entre -1 et 0, $f_k(x) \geqslant 0$, ce qui ne peut arriver que si k est pair non nul (d'après l'énoncé). Ainsi, k est supérieur ou égal à 2.

2(a) Pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O car $f_n(0) = 0$ et un autre point A de coordonnées $\left(1\,;\, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, car

$$\forall n,\ n \in \mathbb{N}^*,\ f_k(1) = \frac{1^n}{\mathrm{e}^1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

(b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, la dérivée de $f_n(x)$ est :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x^n\mathrm{e}^{-x} = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Maximum de $f_3(x)$:

- Dérivée de $f_3(x)$:

$$f_3'(x) = x^{3-1}(3-x)\mathrm{e}^{-x} = x^2(3-x)\mathrm{e}^{-x} \text{ a même signe que } 3-x$$

- Tableau de variations de f_3 :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{27}{\mathrm{e}^3}$	$\searrow$	0

f_3 possède donc un maximum pour $x = 3$, et c'est le seul.

4(a) La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\,;\,0\right)$:

- Équation de la tangente au point d'abscisse 1 :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & 1 \\ \hline f(x) & \frac{1}{\mathrm{e}} \\ \hline f'(x) & \frac{k-1}{\mathrm{e}} \\ \hline \end{array} \Longrightarrow y - \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{k-1}{\mathrm{e}}(x-1) \Longleftrightarrow y = \frac{k-1}{\mathrm{e}}x + \frac{2-k}{\mathrm{e}}$$

- Intersection avec l'axe des abscisses :

$$\frac{k-1}{\mathrm{e}}x + \frac{2-k}{\mathrm{e}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{k-1}{\mathrm{e}}x = \frac{k-2}{\mathrm{e}} \Longleftrightarrow x = \frac{k-2}{k-1}$$

Ainsi, la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\,;\,0\right)$.

(b) Comme l'énoncé nous dit que les coordonnées de A sont $\left(\dfrac{4}{5}\,;\,0\right)$, on a :

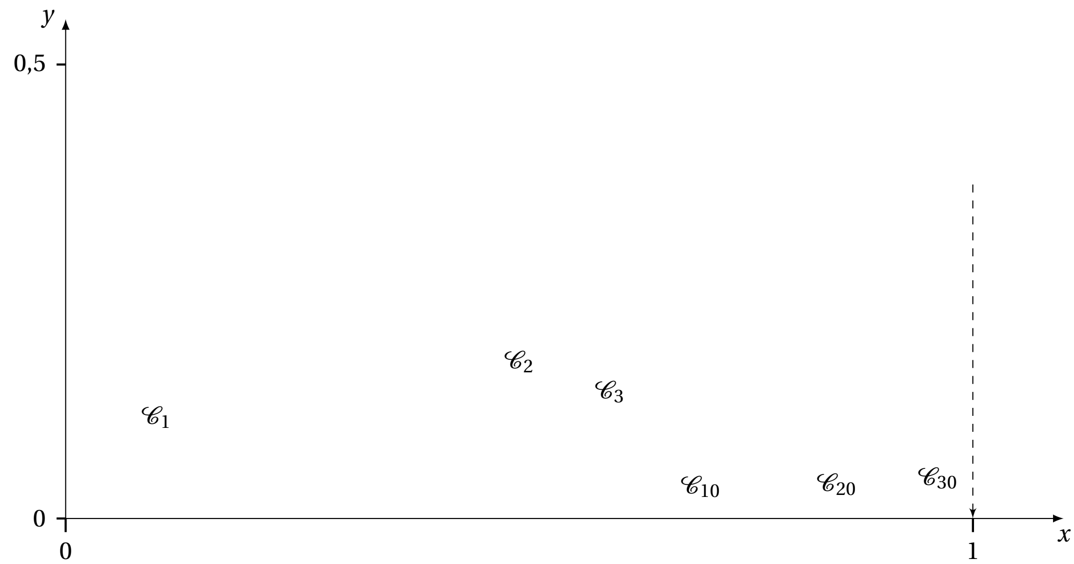
$$\frac{4}{5} = \frac{k-2}{k-1} \Longleftrightarrow 4k - 4 = 5k - 10 \Longleftrightarrow k = 6$$

PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.
2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



(a) Conjecture sur le sens de variation de la suite (In) en décrivant sa démarche :
I_n représente l'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}_n$, les deux axes et la droite d'équation $x = 1$, car $0 < 1$ et $\forall x,\ x \in [0\,;\,1],\ x^n \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.
La figure nous suggère donc que la suite I_n est décroissante.

(b) Démonstration de cette conjecture. Pour tout n entier naturel non nul :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

Or, comme x est compris entre 0 et 1, $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. De plus, 0 est en bas, 1 est en haut, donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et la suite I_n est décroissante.

(c) La suite (I_n) est convergente, car la suite I_n est décroissante et minorée par 0. ($I_n \geqslant 0$ car $x^n \mathrm{e}^{-x} \geqslant$ sur $[0\,;\,1]$).

(d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (I_n)$:

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longleftrightarrow 1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e} \Longleftrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{x^n}{\mathrm{e}} \leqslant x^n \mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n \Longrightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{\mathrm{e}}\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

Ainsi :

$$\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \iff \frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que la limite de I_n est 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 4 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0,\mathscr{P})$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d(M_0,\mathscr{P})=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1. Calcul de $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right|$:

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = \left|\left|\vec{n}\right|\right| \times \left|\left|\overrightarrow{M_0H}\right|\right| \times \left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)\right| = \left|\vec{n}\right| \times \left|\overrightarrow{M_0H}\right|$$

car $\left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)\right|=1$ (les vecteurs sont colinéaires)

Or :

$$\left|\left|\overrightarrow{M_0H}\right|\right| = M_0H \text{ et } \left|\left|\vec{n}\right|\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Donc :

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

2. Le point H appartient au plan $\mathscr{P}$, ses coordonnées $(x;y;z)$ vérifient donc $ax+by+cz+d=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{M_0H}$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = \underbrace{ax+by+cz+d}_{=0}-ax_0-by_0-cz_0-d$$

3. Conclusion :

$$M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \left|-ax_0-by_0-cz_0-d\right| \Longleftrightarrow M_0H = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives (4 ; 1 ; 5), (−3 ; 2 ; 0), (1 ; 3 ; 6), (−7 ; 0 ; 4).

1(a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. En effet :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\1\\-5\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{(nombre impair de signes } -\text{)}$$

Soit le plan d'équation $x+2y-z-1=0$.
- A appartient à ce plan, car $4+2\times1-5-1=0$;
- B appartient à ce plan, car $-3+2\times2-0-1=0$;
- C appartient à ce plan, car $1+2\times3-6-1=0$.

Donc le plan (ABC) a pour équation $x+2y-z-1=0$.

(b) Distance d du point F au plan $\mathscr{P}$:

$$d = \frac{|-7+2\times0-4-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

2. On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

(a) Une représentation paramétrique de la droite Δ :

un vecteur normal au plan $\overrightarrow{n}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$M\in(\Delta) \Longleftrightarrow \exists k,\ k\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{FM}=k.\overrightarrow{n} \Longleftrightarrow \exists k,\ k\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=-7+k\\y=0+2k\\z=4-k\end{cases}$$

(b) Coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$:

$$H\in(\Delta)\cap\mathscr{P} \Longleftrightarrow (-7+k)+2(2k)-(4-k)-1=0 \Longleftrightarrow k=2$$

Les coordonnées de H sont donc : $\begin{pmatrix}-7+2\\2\times2\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix}$

(c) Distance de H au plan Δ :

$$d(H,\Delta) = FH = \sqrt{(-5+7)^2+(4-0)^2+(2-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

3. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.

(a) B appartient à la sphère $\mathscr{S}$ car :

$$BF = \sqrt{(-3+7)^2+(0-2)^2+(4-0)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

(b) Centre et rayon du cercle $\mathscr{C}$, intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$:
Le cercle et le plan ont une intersection non vide car B appartient à la fois à $\mathscr{S}$ et à $\mathscr{P}$.
Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le projeté orthogonal de F sur le plan, c'est-à-dire H.
Le rayon r du cercle $\mathscr{C}$ vérifie $r^2 + FH^2 = 6^2 \iff r^2 = 36-24 = 12$. Ainsi $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$