Baccalauréat S Métropole–La Réunion 21 juin 2012

EXERCICE 1 **4 points**

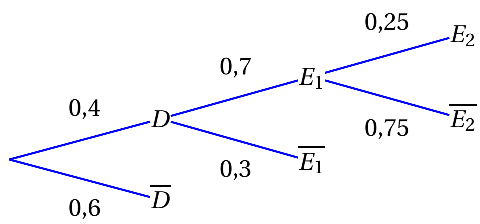
Commun à tous les candidats

1. Sur l'intervalle $[-3, -1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative. VRAIE
2. Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 2[$, on lit que $f'(x) > 0$, donc que f est croissante sur cet intervalle. VRAIE
3. Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1\ ;\ 0[$. Or on sait que $f(0) = -1$. D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les points de cet intervalle ont une image par f inférieure à -1. FAUSSE
4. Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
   On sait que l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est
   $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - (-1) = 1x \iff y = x - 1$. Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ car ces cordonnées vérifient l'équation de la tangente. VRAIE

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.**



   b. On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

   c. Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :
   $p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap E_1 \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93$. D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = 0,07$.
   On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :
   $p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.
   D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. **a.** Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à 0,07. La variable X suit donc une loi binomiale $(\mathscr{B}, n = 5,\ p = 0,07)$.

   b. On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à 0,07.
   La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.
   La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.
   Il faut donc résoudre l'inéquation :
   $1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$.
   Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.
   Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. • $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$, on a donc $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$.
   • On a $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, donc finalement par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Comme sur $[1~;~+\infty[$, $x+1>0$, et $\dfrac{x}{x+1} > 0$ la fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
   Or $u'(x) = \dfrac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
   Donc $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
   Comme $x \geqslant 1$, la dérivée est clairement positive, donc la fonction est croissante sur $[1~;~+\infty[$ de $f(1) = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1}{2} \approx -0,193$ à 0 sa limite en plus l'infini.
3. Le tableau montre que $f(x) < 0$ sur $[1~;~+\infty[$.

Partie B

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - \ln n.$$

1. L'algorithme donne successivement pour u les valeurs :
   $0+1=1$
   $1+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$
   $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$ valeur qu'il affiche.
2. Il suffit de modifier la sortie en : Afficher $u - \ln n$.
3. On peut conjecturer que pour n allant de 4 à 2000 la suite est décroissante et converge vers une valeur proche de 0,577.

Partie C

1. On a $u_{n+1} - u_n = \left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right] = \dfrac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = f(n)$. On a vu que pour $x \geqslant 1, f(x) < 0$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ montre que $u_{n+1} < u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.
2. **a.** Puisqu'on intègre de k strictement positif à $k+1$, on a donc
   $0 < k \leqslant x \leqslant k+1 \iff 0 < \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$
   On a donc en particulier $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k} \iff \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$. L'intégrale sur $[k~;~k+1]$ de la fonction continue et positive est un nombre positif.

- $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0 \iff \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (par linéarité de l'intégrale.

  Or $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\times(k+1-k) = \frac{1}{k}$.

  L'inégalité précédente s'écrit donc : $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.
- On a $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1)-\ln k$.

  Donc l'inégalité précédente s'écrit $\ln(k+1)-\ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1)

b. On obtient la suite des inégalités suivante :

$\ln(1+1)-\ln 1 \leqslant \dfrac{1}{1}$

$\ln(2+1)-\ln 2 \leqslant \dfrac{1}{2}$

$\ln(3+1)-\ln 3 \leqslant \dfrac{1}{3}$

....

$\ln(n)-\ln(n-1) \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

$\ln(n+1)-\ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$

D'où par somme membres à membres et effet de « dominos » :

$\ln(n+1)-\ln 1 \leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ ou encore

$\ln(n+1) \leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$

c. La fonction ln étant croissante, on a $\ln n < \ln(n+1)$ et comme $\ln(n+1) \leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ on en déduit que $\ln n < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n} \iff 0 < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, soit finalement $u_n > 0$.

3. On a vu que la suite est décroissante et ensuite qu'elle est minorée par 0 : elle converge donc vers une limite supérieure à zéro.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Voir à la fin de l'exercice.

b. $z_{\mathrm{A}'} = \dfrac{1}{z_{\mathrm{A}}+1} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

$$z_{\mathrm{B}'} = \frac{1}{z_{\mathrm{B}}+1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}} = \frac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)} = \frac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right).$$

$$z_{\mathrm{C}'} = \frac{1}{z_{\mathrm{C}}+1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})}{\frac{1}{2}} = 1+\mathrm{i}.$$

c. On a $z_{\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\right)-2 = \dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}-2 = -\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$.

De même $z_{\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}} = 1+\mathrm{i}-2 = -1+\mathrm{i}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A′, B′ et C′ ne sont pas alignés.

2. a. g est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

b. Voir la figure

c. Soit I le point d'affixe 1.

$|z-1| = |z| \iff |z-1| = |z-0| \iff |z-z_{\mathrm{I}}| = |z-z_{\mathrm{O}}| \iff \mathrm{I}M = \mathrm{O}M$.

Les points M sont donc équidistants de O et de I : ils appartiennent à la médiatrice de [OI] qui a pour équation $x = \dfrac{1}{2}$ et qui est donc la droite $\mathscr{D}_1$ d'après la question précédente.

3. a. $z_{A_2} = \dfrac{1}{z_{A_1}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = z_{A'}$.

$z_{B_2} = \dfrac{1}{z_{B_1}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\text{i}} = \dfrac{\frac{1}{2}-\text{i}}{\frac{1}{4}+1} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}-\text{i}\right) = z_{B'}$.

Enfin $z_{C_2} = \dfrac{1}{z_{C_1}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{i}} = \dfrac{2}{1-\text{i}} = \dfrac{2(1+\text{i})}{1+1} = 1+\text{i} = z_{C'}$

b. $\left|\dfrac{1}{z}-1\right| = 1 \iff \left|\dfrac{1-z}{z}\right| = 1 \iff \dfrac{|z-1|}{|z|} = 1 \iff |z-1| = |z|$.

c. Soit un point M de $\mathscr{D}_1$ d'affixe z. On a vu que son affixe vérifie $|z-1| = |z|$, donc d'après la question la question précédente $\left|\dfrac{1}{z}-1\right| = 1 \quad (2)$.

Son image par h est le point M_2 d'affixe $z' = \dfrac{1}{z}$.

La relations (2) devient donc $|z'-1| = 1$ qui signifie que le point M_2 appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 1.

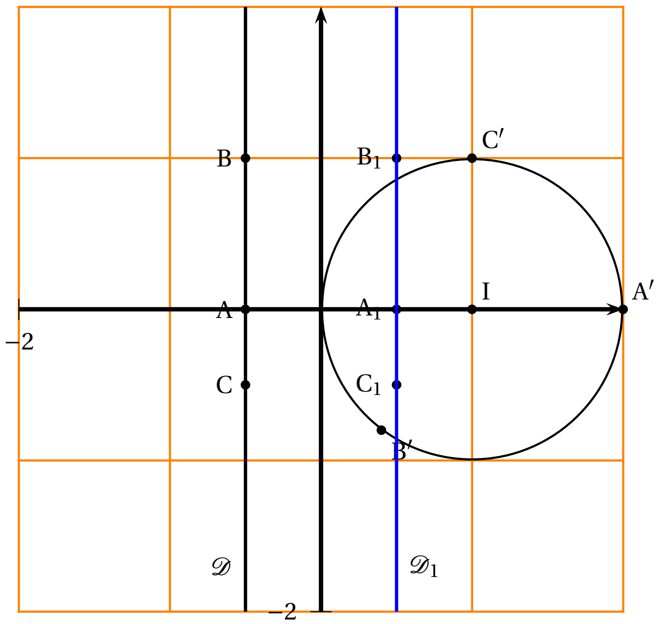
Conclusion : l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans le cercle de centre I et de rayon 1.

4. Soit M un point d'affixe z de la droite $\mathscr{D}$. Son image par g est le point M_1 d'affixe $z+1$.

L'image par h du point M_1 d'affixe $z+1$ est le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$ c'est-à-dire l'image par f de M.

Or l'image par g de la droite $\mathscr{D}$ est la droite $\mathscr{D}_1$ et ensuite on a admis que l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé de O.

Conclusion : l'image par l'application f de la droite $\mathscr{D}$ est le cercle de centre I de rayon 1 privé de O.



EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -1+\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = 1+3\text{i}.$$

et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x+2$.

1. $x_{\text{A}}+2 = -1+2 = 1 = y_{\text{A}}$ donc $\text{A} \in \mathcal{D}$.
$x_{\text{B}}+2 = 0+2 = 2 = y_{\text{B}}$ donc $\text{B} \in \mathcal{D}$.
$x_{\text{C}}+2 = 1+2 = 3 = y_{\text{B}}$ donc $\text{A} \in \mathcal{D}$.
Les trois points A, B et C sont alignés et appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.
(voir figure à la fin).

2. $(1+\text{i})z+3-\text{i} = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-3+\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{(-3+\text{i})(1-\text{i})}{1^2+1^2} = \dfrac{-3+3\text{i}+\text{i}+1}{2} = -1+2\text{i}.$
$-1+2 = 1 \neq 2$ donc le point d'affixe $-1+2\text{i}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1+2\text{i}$, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{(1+\text{i})z+3-\text{i}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$.

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1+\text{i})z+3-\text{i}$.

a. $(1+\text{i})z+3-\text{i} = az+b$ avec $a = 1+\text{i}$ et $b = 3-\text{i}$.
$a \neq 1$ donc c'est l'écriture complexe d'une similitude directe, autre qu'une translation.
Le rapport de cette similitude est $|a| = |1+\text{i}| = \sqrt{2}$.
L'angle de cette similitude est $\arg(a) = \arg(1+\text{i})$; or $1+\text{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{i}\right) = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ donc l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$.

- Soit Ω, d'affixe ω le point fixe de cette similitude.
$\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{3-\text{i}}{1-(1+\text{i})} = \dfrac{3-\text{i}}{-\text{i}} = 3\text{i}+1$ donc $\omega = 1+3\text{i}$.
- On peut également dire que M d'affixe z est invariant par g si :
$(1+\text{i})z+3-\text{i} = z \iff \text{i}z = -3+\text{i} \iff z = 3\text{i}+1 = 1+3\text{i}$. Donc unicité du point invariant.

b. L'affixe de A_1 est $(1+\text{i})(-1+\text{i})+3-\text{i} = -2+3-\text{i} = 1-\text{i}$ donc $z_{\text{A}_1} = 1-\text{i}$.
L'affixe de B_1 est $(1+\text{i})(2\text{i})+3-\text{i} = -2+2\text{i}+3-\text{i} = 1+\text{i}$ donc $z_{\text{B}_1} = 1+\text{i}$.
L'affixe de C_1 est $1+3\text{i}$ puisque C est le point invariant de la similitude.

c. L'image d'une droite par une similitude est une droite. $\mathcal{D}$ est la droite (AB) donc l'image de $\mathcal{D}$ est la droite $\mathcal{D}_1$ passant par A_1 et B_1 , qui a pour équation $x = 1$.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. $h(\text{A}_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{z_{\text{A}_1}} = \dfrac{1}{1-\text{i}} = \dfrac{1+\text{i}}{2}$.

$h(\text{B}_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{z_{\text{B}_1}} = \dfrac{1}{1+\text{i}} = \dfrac{1-\text{i}}{2}$.

$h(\text{C}_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{z_{\text{C}_1}} = \dfrac{1}{1+3\text{i}} = \dfrac{1-3\text{i}}{10}$.

b. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \iff \left|\dfrac{2-z}{2z}\right| = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{|2-z|}{2|z|} = \dfrac{1}{2}$ (car le module du quotient est égal au quotient des modules de chaque terme,) $\iff |2-z| = |z| \Leftrightarrow |z-2| = |z|$.

c. Soit M un point de $\mathcal{D}_1$. L'affixe z de M est $1+\text{i}t$, $t \in \mathbb{R}$.
Alors $|z-2| = |1+\text{i}t-2| = |-1+\text{i}t| = \left|\overline{-1+\text{i}t}\right| = |-1-\text{i}t| = |-(1+\text{i}t)| = |1+\text{i}t| = |z|$.
D'après la question précédente, cela équivaut à $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$. Le point $h(M)$ appartient donc au cercle $\mathcal{C}$ de centre F d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

d. Soit M d'affixe $Z \neq 0$ un point de $\mathcal{C}$, privé de O.
On a $\left|Z-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$. On pose $z = \dfrac{1}{Z}$ et on appelle M_1 le point d'affixe z. D'après b., on a $|z-2| = |z| \Leftrightarrow |z-2| = |z-0|$.
Si l'on note E le point d'affixe 2, on a $\text{O}M_1=\text{E}M_1$ donc M_1 appartient à la médiatrice de [OE] qui est la droite $\mathcal{D}_1$, donc tout point du cercle $\mathcal{C}$ qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite $\mathcal{D}_1$

5. $f = h \circ g$, donc l'image de la droite $\mathcal{D}$ par f est l'image de $\mathcal{D}$ par $h \circ g$. Or, l'image de $\mathcal{D}$ par g est $\mathcal{D}_1$ et celle de $\mathcal{D}_1$ par h est le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.
l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$ est donc le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.