

Corrigé du bac S — Antilles-Guyane juin 2014

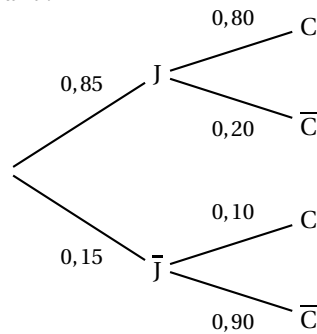
EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. L'arbre pondéré est le suivant :



b. D'après l'arbre :

$$p(\bar{J} \cap C) = 0,15 \times 0,10 = 0,015.$$

c. J et \bar{J} formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$p(C) = p(\bar{J} \cap C) + p(J \cap C) = 0,015 + 0,85 \times 0,80 = 0,695.$$

d. Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle :

$$p_C(\bar{J}) = \frac{p(\bar{J} \cap C)}{p(C)} = \frac{0,015}{0,695} \approx 0,0216.$$

2. À l'aide de la calculatrice : $p(87 \leq X \leq 89) \approx 0,2417$.

3. De même $p(X \geq 91) \approx 0,3085$.

Partie B

1. L'échantillon est de taille $n = 120$. L'hypothèse formulée est que la probabilité p qu'une huître possède une masse supérieure à 91 g est $p = 0,60$. On a alors :

- $n \geq 30$;
- $np = 72 \geq 5$;
- $n(1-p) = 48 \geq 5$.

Les trois conditions pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont réalisées, et cet intervalle I est donné par :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = [0,5123 ; 0,6877]$$

2. La fréquence observée d'huîtres pesant plus de 91 g est $F = \frac{65}{120} \approx 0,5417$.

On a $F \in I$, l'hypothèse selon laquelle $p = 0,60$ ne peut être rejetée.

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. g est dérivable sur \mathbb{R} comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + e^x$. On a alors $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0 $+$
g			

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x , $g(x) \geq 2 > 0$.

2. Étude en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \text{ donc, par somme : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Étude en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \text{ et, par croissances comparées } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \text{ donc, par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1e^x - xe^x}{(e^x)^2} \\ &= 1 + \frac{e^x(1-x)}{e^x \times e^x} \\ &= 1 + \frac{1-x}{e^x} \\ &= \frac{e^x + 1 - x}{e^x} \\ &= e^{-x}g(x). \end{aligned}$$

4. On a vu plus haut que, pour tout réel x , $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $e^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$	$+\infty$

5. La fonction f est continue sur \mathbb{R} , strictement croissante. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'intervalle \mathbb{R} a pour image \mathbb{R} , ce dernier intervalle contenant 0, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède dans \mathbb{R} une solution α unique.

Par ailleurs, $f(-1) = -e^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc : $-1 < \alpha < 0$.

6. a. La tangente T a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1.$$

- b. Posons, pour tout réel x , $k(x) = f(x) - (2x + 1)$, alors :

$$\begin{aligned} k(x) &= x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x + 1) \\ &= \frac{x}{e^x} - x \\ &= \frac{x}{e^x} (1 - e^x). \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$1 - e^x$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$-$	0	$-$

On en déduit que \mathcal{C} est située en dessous de T.

Partie B

1. Pour tout réel x :

$$H'(x) = -e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(x+1-1) = xe^{-x} = h(x),$$

la fonction H est donc une primitive de h sur \mathbb{R} .

2. Sur $[1; 3]$, \mathcal{C} est en dessous de T, l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_3^4 ((2x+1) - f(x)) dx \\ &= \int_1^3 x - h(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - H(x) \right]_1^3 \\ &= 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

- La proposition est **fausse** ; en effet, on a : $\vec{AB}(-2; 4; -1)$ et $\vec{AC}(6; -12; 3)$, ces deux vecteurs sont colinéaires (car $\vec{AC} = -3\vec{AB}$), donc les trois points A, B et C sont alignés et ne définissent pas un plan.
- La proposition est **vraie** car on vérifie aisément que les coordonnées de chacun des points A, B et D vérifient l'équation $x - 2z + 9 = 0$.
- La proposition est **fausse** : la droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\vec{u}(\frac{3}{2}; -3; -\frac{3}{2})$, ce vecteur n'étant pas colinéaire à \vec{AC} , il ne peut diriger (AC).
- La proposition est **fausse** : le plan \mathcal{P} a pour vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 5)$, le plan \mathcal{P}' a pour vecteur normal $\vec{n}'(-3; -1; 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

- b. Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
2. a. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- **Initialisation.** On a $u_1 = 3,4$ et $\frac{15}{4} \times 0,5 = 1,875$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul, la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$(HR) \quad u_k \geq \frac{15}{4} \times 0,5^k$$

on doit alors démontrer que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1}$.

D'après (HR) :

$$\begin{aligned} u_k &\geq \frac{15}{4} \times 0,5^k && \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\ \frac{1}{5}u_k &\geq \frac{3}{4} \times 0,5^k && \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0,5^k : \\ \frac{1}{5}u_k + 3 \times 0,5^k &\geq \frac{3}{4} \times 0,5^k + 3 \times 0,5^k && \text{c'est-à-dire :} \\ u_{k+1} &\geq \frac{15}{4} \times 0,5^k \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel k , $0,5^k \geq 0,5^{k+1}$, on en déduit donc que :

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1}$$

et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire.

- **Conclusion.** La propriété $\mathcal{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

- b. Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n \\ &= 3 \times 0,5^n - \frac{4}{5}u_n \\ &= \frac{4}{5} \left(\frac{15}{4} \times 0,5^n - u_n \right) \end{aligned}$$

D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

- c. D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0,5^{n+1} \\ &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5 \times 0,5^n \\ &= \frac{1}{5}u_n - 2 \times 0,5^n \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 10 \times 0,5^n) \\ &= \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0,5^0 = 2 - 10 = -8$.

- b. La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
On en déduit que $-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0,5^n$ et donc que : $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.
- c. $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0,5 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$.
On en déduit par opérations sur les limites que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. L'algorithme complet est :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que $u > 0,01$ (1) n prend la valeur $n + 1$ (2) u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0,5^{n-1}$ (3) Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. x et y sont des entiers naturels tels que $24x + 45y = 438$, par conséquent :
- $24x \leq 438$ d'où $x \leq \frac{438}{24} = 18,25$, donc $x \leq 18$;
 - $45y \leq 438$ d'où $y \leq \frac{438}{45} \approx 9,73$, donc $y \leq 9$.
- b. Voici l'algorithme complété :

Entrée :	x et y sont des nombres
Traitement :	Pour x variant de 0 à 18 (1) Pour y variant de 0 à 9 (2) Si $24x + 45y = 438$ (3) Afficher x et y Fin Si Fin Pour Fin Pour
Fin traitement	

- c. Le coût total de réservation étant de 438 €, et 438 étant égal à 146×3 , ce montant est multiple de 3!
- d. i. Les entiers 8 et 15 étant premiers entre eux, le théorème de Bézout entraîne l'existence d'un couple $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que $8x + 15y = 1$.
- ii. On a de façon évidente $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 1$, le couple $(2; -1)$ est donc une solution particulière.
- iii. On a $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 1$, donc, en multipliant par 146 :

$$8 \times 292 + 15 \times (-146) = 146.$$

Soit $(x; y)$ un autre couple solution de (E), alors :

$$(1) \quad 8x + 15y = 8 \times 292 + 15 \times (-146) \iff 8(x - 292) = 15(-y - 146).$$

15 et 8 sont premiers entre eux et 15 divise $8(x - 292)$, donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise $x - 292$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $x - 292 = 15k \iff x = 292 + 15k$. La relation (1) entraîne alors que $8 \times 15k = 15(-y - 146)$, d'où $y = -146 - 8k$.

Les couples solutions sont donc de la forme $(292 + 15k ; -146 - 8k)$.

Réciproquement, de tels couples sont bien solutions de (E) car :

$$8(292 + 15k) + 15(-146 - 8k) = 146.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{(292 + 15k ; -146 - 8k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$.

- e. Soit x et y le nombre de nuitées passées respectivement dans les hébergements A et B, alors $24x + 45y = 438 \iff 8x + 15y = 146$. Il existe alors un entier relatif k tel que $x = 292 + 15k$, et par ailleurs $x \geq 0$ et $x \leq 13$, d'où :

$$0 \leq 292 + 15k \leq 13 \iff -\frac{292}{15} \leq k \leq -\frac{279}{15}.$$

Comme $-\frac{292}{15} \approx -19,47$ et $-\frac{279}{15} = -18,6$, la seule possibilité est que $k = -19$.

On en déduit que $x = 292 + 15 \times (-19) = 7$ et que $y = -146 - 8 \times (-19) = 6$.

Ce randonneur a donc passé 7 nuits en hébergement A et 6 nuits en hébergement B.