Métropole S, correction

19 juin 2014 | 4 heures

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$$

1. $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$: $f_1(0) = 0 + \mathrm{e}^{-0} = 1$.
2. Variations de f_1 :
   - Dérivée de f :
   $$f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x > 1 = \mathrm{e}^0 \Longleftrightarrow x > 0$$
   - Sens de variations de f :
   f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$, croissante sur $]0\,;+\infty[$ et possède une tangente horizontale au point A.
   - Limites :
   $$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$
   $$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-x}\right) + \infty; \text{ car } \lim_{\mathrm{X}=-x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} = +\infty \text{ et } \lim_{\mathrm{X}=-x\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$
   - Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}$$