Géométrie analytique

Voici un chapitre court et simple. Les notions étudiées seront revues plus clairement l'année prochaine pour le Baccalauréat.
Nous travaillerons en deux temps : dans un premier nous nous placerons dans le plan, puis nous irons dans l'espace.

www.mathsbook.fr

I - Equation cartésienne dans le plan

Dans le plan d'abord.

Equation cartésienne d'une droite : Soient un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a, b deux réels dont au moins un et non nul et c un réel.
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, toute droite admet une **équation cartésienne** de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

On connaissait l'équation d'une fonction affine rappelez-vous. Bien c'est la même chose, on a juste rassemblé les x et les y ensembles.
Et bien quoi ? Oui, une fonction affine, c'est une droite !

Remarque : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées s'écrit : $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Comment on détermine l'équation cartésienne d'une droite à partir de deux points ?
Suivez bien l'exemple qui suit.

Exemple : Soit $A(3,4)$ et $B(-1,2)$ deux points du plan. Déterminons l'équation cartésienne de la droite (AB).

Cet équation s'écrit : $y = ax + b$.
Oui, c'est une fonction affine en fait.
On a deux points donc deux équations :

$$\begin{cases} y_A & = & ax_A + b \\ y_B & = & ax_B + b \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 4 & = & 3a + b \\ 2 & = & -a + b \end{cases}$$

Que l'on résout aisément, en soustrayant la deuxième équation à la première.

$$\begin{cases} 4 & = & a3 + b \\ 2 & = & 4a \end{cases}$$

On a donc : $a = \frac{1}{2}$.
Puis :

$$2 = -\frac{1}{2} + b$$

Soit : $b = \frac{5}{2}$.
Donc l'équation de la droite (AB) est :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Propriétés : Soit une droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$.

- Le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ est un **vecteur directeur** de Δ.
- Le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est un **vecteur normal** de Δ.

Le vecteur directeur, comme son nom l'indique, dirige la droite. Tandis que le vecteur normal est perpendiculaire à la droite.

Exemple : Trouver l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(5,2)$ et parallèle à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $x - 2y + 3 = 0$.

On sait que le vecteur $\overrightarrow{u}(2,1)$ est directeur à la droite $\mathcal{D}'$.
Soit un point $M(x,y)$ du plan.
Pour que ce point appartienne à la droite $\mathcal{D}$, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
En langage mathématiques, cela se traduit ainsi :

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{u}$$

La notation $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{u}$ signifie "colinéaire à". Ne mettez pas cela dans votre copie, c'est uniquement pour que vous compreniez.

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{u}$$

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow a(x-5) = -b(y-2)$$

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow a(x-5) + b(y-2) = 0$$

Voilà, nous l'avons notre équation cartésienne.

Un dernier point avant d'attaquer la trois dimensions.

Définition : Soit $\mathcal{C}$un cercle de rayon R et de centre $\Omega(a,b)$.
L'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Comment on arrive là ? J'en suis sur que vous pouvez tout-à-fait le comprendre.

Démonstration : Soient un cercle $\mathcal{C}$ centre Ω et de rayon r, $A(a,b)$ un point du cercle et un point $M(x,y)$ du plan.

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow AM = R$$

Or, on sait que :

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Donc :

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

On élève tout au carré et c'est gagné.

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Remarque : Familiarisez-vous avec ce point aléatoire M du plan. Il va nous être utile plus d'une fois.

II - Equation cartésienne dans l'espace

On peut attaquer la 3D.

1 - Plan

Dans l'espace, nous aurons surtout affaire à des plans.

Définitions :
– Tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation cartésienne de la forme $z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

– Tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation cartésienne de la forme $y = \beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

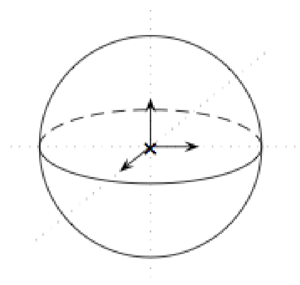
– Tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation cartésienne de la forme $x = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

En fait, si c'est parallèle au plan (xOy), c'est l'axe qui n'intervient pas dans ce plan, soit z, qui est constant.

2 - Sphère

Et à des sphères.

Equation cartésienne d'une sphère : Soit une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R.



Cette sphère a pour équation cartésienne :

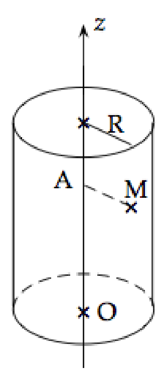
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Cela se démontre très bien en refaisant la même démonstration que celle faite pour le cercle, mais en 3D cette fois.

3 - Cylindre de révolution

Vous rappelez-vous des cylindres ?

Equation cartésienne d'un cylindre de révolution : Soit un cylindre de révolution $\mathcal{C}$ de rayon R admettant l'axe des cotes pour axe de révolution.



Ce cylindre de révolution a pour équation cartésienne :

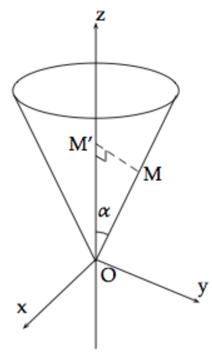
$$x^2 + y^2 = R^2$$

C'est en fait l'équation d'une sphère sans le z car c'est cette axe sur lequel "tourne" le cylindre.

4 - Cône de révolution

Finissons par le cône de révolution.

Equation cartésienne d'un cône de révolution : Soit un cône de révolution $\mathcal{C}$ de sommet O admettant l'axe des cotes pour axe de révolution et $\beta \in \mathbb{R}^+$.



Ce cône de révolution a pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 - \beta z^2 = 0$$

Ces trois cas doivent être connus par coeur.
Comprenez aussi comment on y arrive, c'est intéressant et important.
Si c'est fait, nous en avons fini pour ce chapitre.