Fonction logarithme - Correction

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln x + \ln(2-x)$

   On sait, d'après le cours que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Autrement dit, la fonction logarithme ne "mange que du strictement positif.
   Par conséquent, tout ce qu'il y a dans le ln soit être strictement positif :

   $(x > 0$ et $2-x > 0) \Longleftrightarrow (x > 0$ et $x < 2) \Longleftrightarrow 0 < x < 2$.

   Conclusion : $D_f =]0;2[$.

2. $g(x) = \ln(\ln x))$

   On sait, d'après le cours que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Autrement dit, la fonction logarithme ne "mange que du strictement positif.
   Par conséquent, tout ce qu'il y a dans le ln soit être strictement positif :

   $(x > 0$ et $\ln x > 0) \Longleftrightarrow (x > 0$ et $x > 1) \Longleftrightarrow x > 1$.

   Conclusion : $D_g =]1;+\infty[$.

3. $h(x) = \sqrt{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$

   On sait, d'après le cours que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$.
   Autrement dit, la fonction logarithme ne "mange que du strictement positif et la racine que du positif.
   Par conséquent, tout ce qu'il y a dans le ln soit être strictement positif et tout ce qu'il y a dans la racine doit être positif (ou nul) :

   $D_h = \{x > 0$ et $\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\}$

   Or, on sait qu'un quotient est positif si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont de même signe.

   $\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\} \geqslant 0 \Longleftrightarrow (\ln x - 1 \geqslant 0$ et $\ln x + 1 > 0)$ ou $(\ln x - 1 \leqslant 0$ et $\ln x + 1 < 0)$

   $\Longleftrightarrow (x \geqslant e$ et $x > \frac{1}{e})$ ou $(0 < x \leqslant e$ et $0 < x < \frac{1}{e})$

   $\Longleftrightarrow x \geqslant e$ ou $0 < x < \frac{1}{e}$

   Conclusion : $D_h =]0;\frac{1}{e}[U[e;+\infty[$.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(1+x) = \ln(1-2x)$

$$\ln(1+x) = \ln(1-2x) \Longleftrightarrow 1+x = 1-2x$$
$$\Longleftrightarrow x = 0$$

2. $\ln(3+x) + \ln(3-x) = \ln 5$

Il faut nécessairement que $3+x>0$ et $3-x>0$, c'est-à-dire que $x>3$.

$$\ln(3+x)+\ln(3-x)=\ln 5 \Longleftrightarrow \ln[(3+x)(3-x)]=\ln 5 \Longleftrightarrow \ln(x^2-9)=\ln 5$$

$$\Longleftrightarrow x^2-9=5 \Longleftrightarrow x=\sqrt{14}$$

3. $\ln(3+x)-\ln(x+13)+\ln(x+1)=0$

   Il faut nécessairement que $x+1>0$, $3+x>0$ et que $x+13>0$.
   Autrement dit, l'ensemble de définition de l'équation est : $]-1;+\infty[$.

$$\ln(3+x)-\ln(x+13)+\ln(x+1)=0 \Longleftrightarrow \ln(\frac{(3+x)(x+1)}{x+13})=0 \Longleftrightarrow \frac{(3+x)(x+1)}{x+13})=1$$

$$\Longleftrightarrow (3+x)(x+1)=x^2+4x+3=x+13 \Longleftrightarrow x^2+3x-10=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+5)(x-2)=0 \Longleftrightarrow x=-5oux=2$$

   Or, $-5<-1$ et $2>-1$. Il n'y a que la solution 2 qui est dans l'ensemble de définition.

   Conclusion : $x=2$ est l'unique solution de l'équation.

   Remarque : vous voyez bien l'utilité de trouver le domaine de définition.

4. $2\ln^3 x+5\ln^2 x+\ln x-2=0$

   Exemple un tout petit peu plus difficile.

   L'équation est définie pour $x>0$.
   On remarque très vite qu'un ressemble à une équation polynomiale.
   Posons donc : $X=\ln x$.
   L'équation devient : $2X^3+5X^2+X-2=0$.
   En cherchant une racine évidente (rapidement, de tête), on remarque que -1 en est une. Factorisons donc ce polynôme par -1

$$2X^3+5X^2+X-2=0 \Longleftrightarrow (X+1)(2X^2+3X-2)=0$$

   Le discriminant du polynôme $2X^2+3X-2$ vaut : $\Delta=25$. Ces racines sont donc les suivantes :

$$X_1=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$$

$$X_2=\frac{-3-5}{4}=-2$$

   Revenons à l'équation polynomiale du départ.

   $2X^3+5X^2+X-2=0 \Longleftrightarrow (X=-1$ ou $X=\frac{1}{2}$ ou $X=-2)$

   En revenant aux ln : ($\ln x=-2$ ou $\ln x=-1$ ou $\ln x=\frac{1}{2}$), ce qui équivaut à :

   $x=\frac{1}{e^2}$ ou $x=\frac{1}{e}$ ou $x=\sqrt{e}$.

   Conclusion : $S=\{\frac{1}{e^2};\frac{1}{e};\sqrt{e}\}$

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(-x^2+4x+6)<0$

   D'abord, l'ensemble de définition, qui est : $]2-\sqrt{10};2+\sqrt{10}[$.

$$\ln(-x^2+4x+6)<0 \Longleftrightarrow -x^2+4x+6<1 \Longleftrightarrow -x^2+4x+5<0$$

Le polynôme $-x^2+4x+5$ admet deux racines : -1 et 5.
Donc : $-x^2+4x+5=(x+1)(x-5)$.
En traçant le tableau de signes (vous savez faire), on trouve aisément que le polynôme est positif si, et seulement si, $x \in]-\infty;-1[U]5;+\infty[$.

Conclusion : Sans oublier le domaine de définition, $S=]2-\sqrt{10};-1[U]5;2+\sqrt{10}[$.

2. $\ln x - \frac{1}{\ln x} > \frac{3}{2}$

Commençons par l'ensemble de définition : $]0;1[U]1;+\infty[$.

On va poser $X=\ln x$.
L'inéquation devient donc : $X-\frac{1}{X} > \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{2X^2-3X-2}{2X} > 0$.

Le discriminant du polynôme du numérateur vaut $\Delta = 25$. Ses racines sont donc 2 et $-\frac{1}{2}$.
En traçant le tableau de signes (vous savez faire), on trouve aisément que le polynôme entier est positif si, et seulement si, $x \in]-\frac{1}{2};0[U]2;+\infty[$.
On revient aux logarithmes.

e $\ln x - \frac{1}{\ln x} > \frac{3}{2} \Longleftrightarrow (-\frac{1}{2} < \ln x < 0 \text{ ou } 2 < \ln x) \Longleftrightarrow (\frac{1}{\sqrt{e}} < x < 1 \text{ ou } e^2 < x)$.

Conclusion : $S=]\frac{1}{\sqrt{e}};1[U]e^2;+\infty[$.

Exercice 4

On pose, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$

1. Montrer que f admet un minimum en $x=1$.

La fonction f est dérivable sur R_+^*. Dérivons la : $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$.
La dérivée s'annule pour $x=1$.
Déterminons à présent s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.
Pour $x>1$, on a une dérivée positive et donc une fonction strictement croissante.
Pour $0<x<1$, la dérivée est négative et donc la fonction est strictement décroissante.
Conclusion : la fonction f admet un minimum en $x=1$.

2. En déduire que si $x \geqslant 1$, alors $0 \leqslant \ln x \leqslant 2\sqrt{x}$.

On sait que le minimum de la fonction f est atteint pour $x=1$ et donc que $f(1)=2$.
Donc, la fonction f est strictement positive car sa valeur minimale est 2.
D'où :

$$f(x)>0 \Longleftrightarrow 2\sqrt{x}-\ln x>0 \Longleftrightarrow 2\sqrt{x}>\ln x$$

Et si $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \ln x \leqslant 2\sqrt{x}$$

3. En déduire la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$$

Utilisons encore une fois la question précédente : si $x \geqslant 1$, alors $0 \leqslant \ln x \leqslant 2\sqrt{x}$.
Divisons tous les termes par x :

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

Exercice 5

Montrer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Posons, pour tout $x\in]-1;+\infty[$, $f(x)=\ln(1+x)$.
La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est : $f'(x)=\frac{1}{1+x}$.
De plus, $f(0)=\ln(1)=0$.
Donc,

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Vous ne reconnaissez rien ? C'est le taux d'accroissement de la fonction f en 0.
Comme f est dérivable en 0, on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=f'(0)=1$$

Exercice 6

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\ln(\frac{x+1}{x^2-4x+4})$$

Essayons de trouver une forme plus agréable pour calculer cette dérivée.

$$(x-2)\ln(\frac{x+1}{x^2-4x+4})=(x-2)\ln(\frac{x+1}{(x-2)^2})$$

$$=(x-2)[\ln(x+1)-\ln[(x-2)^2]]=(x-2)\ln(x+1)-2(x-2)\ln(x-2)$$

La limite à calculer revient à calculer :

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\ln(\frac{x+1}{x^2-4x+4})=\lim_{x\to 2}[(x-2)\ln(x+1)-2(x-2)\ln(x-2)]$$

$$=\lim_{x\to 2}[(x-2)\ln(x+1)]-\lim_{x\to 2}[2(x-2)\ln(x-2)]$$

Or,

$$\lim_{x\to 2}(x-2)=0$$

Et on sait que :

$$\lim_{X\to 0}X\ln X=0$$

Donc,

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2)=0$$

De plus,

$$\lim_{x\to 2}\ln(x+1)=\ln 3$$

car la fonction ln est continue en 2. On a donc :

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\ln(x+1)=0$$

Conclusion :

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\ln(\frac{x+1}{x^2-4x+4})=0-0=0$$

Exercice 7

Déterminer la limite suivante de la fonction suivante aux bornes de son ensemble de définition.

$$f(x) = \ln(\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1})$$

Déterminons tout d'abord l'ensemble de définition de cette fonction f.
Cette fonction est définie lorsque $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1} > 0$ car un logarithme ne "mange" que du positif.
Le discriminant du polynôme du dénominateur est négatif, ce qui signifie qu'il est toujours positif : $x^2 - x + 1 > 0$. Les racines du polynôme du numérateur $x^2 + 3x + 2$ sont -1 et -2.
En traçant le tableau de signes de ce polynôme, on trouve que :

$$x^2 + 3x + 2 > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; -2; [U] - 1; +\infty[$$

Et comme le dénominateur est toujours positif,

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1} > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; -2; [U] - 1; +\infty[$$

D'où : $D_f =]-\infty; -2; [U] - 1; +\infty[$.

On peut à présent revenir au calcul des limites.
Prenons $u(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}$ tel que $f(x) = \ln[u(x)]$.
Réécrivons la fonction u de cette façon :

$$u(x) = \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} u(x) = 1$$

De plus,

$$\lim_{x \to -2^-} (x^2 + 3x + 2) = 0^+$$

$$\lim_{x \to -2} (x^2 - x + 1) = 7$$

Donc :

$$\lim_{x \to -2^-} u(x) = 0^+$$

Et :

$$\lim_{x \to -1^+} (x^2 + 3x + 2) = 0^+$$

$$\lim_{x \to -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

Donc :

$$\lim_{x \to -1^+} u(x) = 0^+$$

<u>Limite en $\pm\infty$</u> :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln[u(x)] = \ln(1) = 0$$

<u>Limite en -2</u> :

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \ln[u(x)] = -\infty$$

<u>Limite en -1</u> :

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \ln[u(x)] = -\infty$$

Exercice 8

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+5x)}{\sqrt{x}}$$

Notons la fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \frac{\ln(1+5x)}{\sqrt{x}}$.
Décomposons cette fonction afin de calculer sa limite en 0^+.

$$f(x) = \frac{\ln(1+5x)}{\sqrt{x}} = \frac{5x}{\sqrt{x}} \times \frac{\ln(1+5x)}{5x} = 5\sqrt{x} \times \frac{\ln(1+5x)}{5x}$$

Le quotient $\frac{\ln(1+5x)}{5x}$ est de la forme $\frac{\ln(1+X}{X}$. Génial ! On a une formule dans le cours sur ça.

$$\lim_{x\to 0} 5x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x} = 1$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} 5\sqrt{x} = 0$$

Conclusion :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+5x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} 5\sqrt{x} \times \frac{\ln(1+5x)}{5x} = 0 \times 1 = 0$$

Exercice 9

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 1)$

   Pour tout $x \in [2; +\infty[$, posons $u(x) = x^3 - 3x + 1 > 0$. On a alors $f(x) = \ln[u(x)]$. On sait que :

   $$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

   Donc, on applique tout bêtement la formule avec $u'(x) = 3x^2 - 3$.

   $$f'(x) = \frac{{}''x^2 - 3}{x^3 - 3x + 1}$$

2. $g(x) = \frac{\ln^2 x + 2\ln x - 1}{\ln x - 2}$

   La forme de la fonction vous fait peur ? C'est très simple regardez.
   Remarquez juste que $g(x) = u(\ln x)$.
   On a :

   $$g'(x) = \frac{1}{x} \times u'(\ln x)$$

   Donc, pour tout $x \in]e^2; +\infty[$, on a :

   $$g'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\ln^2 x - 4\ln x - 3}{(\ln x - 2)^2}$$

Exercice 10

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(\frac{x}{2-x})$$

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

   Il faut nécessairement que ce que "mange" le ln soit strictement positif.
   Soit : $\frac{x}{2-x} > 0 \iff 0 < x < 2$
   Donc : $D_f =]0; 2[$.

2. Calculer la dérivée de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée vaut :

$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} \times \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x(2-x)}$$

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.

D'abord, es-ce que cette tangente existe ? Oui, car la fonction f est dérivable en 1.
L'équation de la tangente (T) à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = f'(1) \times (x-1) + f(1) \Longleftrightarrow y = 2x - 2$$

4. Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de la droite (T).

Posons, pour tout $x \in D_f$, la fonction $g(x) = f(x) - y = f(x) - y$.
Le signe de cette fonction va nous aider à répondre à la question.
Calculons sa dérivée.

$$g'(x) = f'(x) - 2 = \frac{2}{x(2-x)} - 2 = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}$$

Pour tout $x \in D_f$ et différent de 1, $g'(x) > 0$. La fonction g est strictement croissante sur D_f.
Comme (T) est la tangente à (C) au point d'abscisse 1, on a : $g(1) = 0$.
Si $0 < x < 1$, alors $g(x) < 0$ et si $1 < x < 2$ alors $g(x) > 0$.

Conclusion :

- Sur $]0; 1[$, la courbe (C) est en dessous de la droite (T).
- Sur $]1; 2[$, la courbe (C) est au dessus de la droite (T).

Exercice 11

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln(\frac{x-1}{x})$$

On désigne par (C) est la courbe représentative de la fonction f.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

Il faut nécessairement que ce que "mange" le ln soit strictement positif.
Soit : $\frac{x-1}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; 0[U]1; +\infty[$
Donc :

$$D_f =]-\infty; 0[U]1; +\infty[$$

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de ce domaine de définition.

- Limite en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

Or, d'après le théorème de la limite d'une fonction composée, on sait que :

$$\lim_{X \to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln(\frac{x-1}{x}) = 0$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

– Limite en 0^- :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} 1-\frac{1}{x} = +\infty$$

Or, d'après le théorème de la limite d'une fonction composée, on sait que :

$$\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^-} \ln(\frac{x-1}{x}) = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{x}{2} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

– Limite en 1^+ :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to 1^+} 1-\frac{1}{x} = 0^+$$

Or, d'après le théorème de la limite d'une fonction composée, on sait que :

$$\lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1^+} \ln(\frac{x-1}{x}) = -\infty$$

De plus,

$$\lim_{x\to 1^+} -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2} - \infty = -\infty$$

3. En déduire la présence de deux asymptotes à (C).

Grâce aux limites qui tendent vers l'infini quand x tend vers 0 et 1, on en déduit que les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales à (C).

4. Montrer que (C) admet une asymptote oblique (D) quand x tend vers $\pm\infty$. Donner une équation cartésienne de cette droite (D) puis étudier la position relative de cette droite et de la courbe (C).

   On a :
$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln(\frac{x-1}{x}) = 0$$
   On a donc une asymptote oblique de (C) au voisinage de $\pm\infty$.
   Posons $g(x) = \ln(1-\frac{1}{x})$.
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$
   On peut dont écrire : $f(x) = -\frac{x}{2} + g(x)$.
   L'asymptote oblique (D) a pour équation : $y = -\frac{x}{2}$ La position relative des droites (C) et (D) s'obtient en étudiant le signe de $g(x)$, la différence des deux.

   – Si $x \in]-\infty; 0[$, alors $1 - \frac{1}{x} > 1$ et donc $g(x) > 0$. D'où : (C) est au dessus de (D).

   – Si $x \in]1; +\infty[$, alors $1 - \frac{1}{x} < 1$ et donc $g(x) < 0$. D'où : (C) est en dessous de (D).

5. Déterminer la dérivée de la fonction f.

   On vérifie toujours la décidabilité avant de calculer une dérivée.
   Là, c'est bon. Calculons la donc.
$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x+1)} = \frac{(x+1)(2-x)}{2x(x-1)}$$
   Si vous avez encore du mal à faire ce genre de calcul, revoyez l'exercice sur le sujet.

6. Déterminer le signe de la dérivée de la fonction f.

   Dans l'intervalle de définition, le dénominateur de la dérivée de la fonction f est toujours strictement positif : $2x(x-1) > 0$.
   Donc, le signe de cette dérivée est celui de son numérateur qui est un polynôme du second degré, de racines -1 et 2.

   – Si $x \in]-\infty; -1[U]2; +\infty[$, alors $f'(x) < 0$.

   – Si $x \in]-1; 0[U]1; 2[$, alors $f'(x) > 0$.

   De plus, $f'(1) = f'(2) = 0$.

7. Déterminer les variations de la fonction f.

   D'après la question précédente : la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[U]2; +\infty[$ et strictement croissante sur $]-1; 0[U]1; 2[$.

8. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   Vous savez faire (je crois). Vous avez toutes les informations nécessaires et suffisantes en tous les cas.

9. Tracer la courbe (C) ainsi que ses asymptote et son centre de symétrie.

   J'ai perdu mon crayon. Désolé.