

FONCTION EXPONENTIELLE - CORRECTION

EXERCICE 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{-x} - e^x = 0$

$$e^{-x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$$

2. $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$

On pose $X = e^x$.

L'équation à résoudre devient donc :

$$X^2 - (1+e)X + e = 0$$

C'est une équation du second degré. Calculons le discriminant Δ .

$$\Delta = (1+e)^2 - 4e = 1 - 2e + e^2 = (1-e)^2$$

Et donc, en sachant que $e > 1$, la racine du discriminant vaut :

$$\sqrt{\Delta} = e - 1$$

L'équation du second degré admet donc deux solutions distinctes :

$$\begin{cases} X_1 &= \frac{1+e+e-1}{2} = \frac{2e}{2} = e > 0 \\ X_2 &= \frac{1+e-(e-1)}{2} = \frac{1+e-e+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0 \Leftrightarrow (e^x = e \text{ ou } e^x = 1) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

3. $-2e^x + 19 = 5e^x$

$$-2e^x + 19 = 5e^x \Leftrightarrow (7e^x = 19) \Leftrightarrow (e^x = \frac{19}{7}) \Leftrightarrow (\ln(e^x) = \ln(\frac{19}{7})) \Leftrightarrow x = \ln(\frac{19}{7})$$

4. $\frac{3e^x+1}{5e^x+2} = \frac{e^x-37}{2e^x-64}$
On pose $X = e^x$.

L'équation de départ devient donc :

$$\frac{3X+1}{5X+2} = \frac{X-37}{2X-64}$$

L'ensemble de définition de cette équation est : $\mathbb{R} - \{-\frac{2}{5}; 32\}$.

Résolvons-la.

$$\frac{3X+1}{5X+2} = \frac{X-37}{2X-64} \Leftrightarrow (3X+1)(2X-64) = (5X+2)(X-37)$$

$$\Leftrightarrow (6X^2 - 190X - 64 = 5X^2 - 183X - 74) \Leftrightarrow X^2 - 7X + 10 = 0 \Leftrightarrow (X-2)(X-5) = 0$$

Soit : $X = 2$ ou $X = 5$.

Or, 2 et 5 sont dans l'ensemble de définition $\mathbb{R} - \{-\frac{2}{5}; 32\}$, donc 2 et 5 sont bien solutions de $\frac{3X+1}{5X+2} = \frac{X-37}{2X-64}$.

Revenons au petit x :

$$e^x = 2 \text{ ou } e^x = 5 \text{ soit : } x = \ln(2) \text{ ou } x = \ln(5)$$

5. $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$
On pose $X = e^{3x+2} > 0$.

L'équation de départ devient donc :

$$X + \frac{e}{X} = 1 + e$$

Réolvons cette équation.

$$X + \frac{e}{X} = 1 + e \Leftrightarrow X^2 - (1 + e)X + e = 0$$

Equation du second degré avec $\Delta = (1 + e)^2 - 4e = (1 - e)^2$ positif, donc deux solutions distinctes.

$$\begin{cases} X_1 &= \frac{1+e+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1+e+e-1}{2} = e \\ X_2 &= \frac{1+e-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1+e-e+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Ces solutions sont strictement positives, donc, en revenant au petit x :

$$e^{3x+2} = e \text{ ou } e^{3x+2} = 1, \text{ soit : } 3x + 2 = 1 \text{ ou } 2x + 2 = 0.$$

Donc, les solutions de l'équation $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$ sont les suivantes : $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

EXERCICE 2

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{x^2} e^x < e^6$

$$e^{x^2} e^x < e^6 \Leftrightarrow e^{x^2+x} < e^6 \Leftrightarrow x^2 + x < 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 < 0$$

On résout aisément l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ pour trouver les solutions -3 et 2 .

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =] - 3; 2[$$

2. $\frac{2e^x-1}{e^x-2} < \frac{e^x}{e^x+1}$

Cette inéquation est définie pour x tel que $e^x - 2 \neq 0$ c'est-à-dire si $x \neq \ln(2)$.

On pose $X = e^x$.

L'inéquation de départ devient donc :

$$\frac{2X-2}{X-2} < \frac{X}{X+1}$$

Ce qui se résout ainsi :

$$\frac{2X-2}{X-2} < \frac{X}{X+1} \Leftrightarrow \frac{2X-2}{X-2} - \frac{X}{X+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{X^2+3X-1}{(X-2)(X+1)} < 0$$

Les racines du polynôme $X^2 + 3X - 1$ sont $X_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} < 0$ et $X_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} > 0$.

Or, $X = e^x > 0$, on ne gardera que la solution positive.

Traçons le tableau de signe correspondant.

X	0	X_2	2	$+\infty$
$X^2 - 3X - 1$	-	0	+	+
$X - 2$	-	-	0	+
$X + 1$	+	+	+	+
Q	+	0	-	

Donc :

$$\frac{X^2 + 3X - 1}{(X - 2)(X + 1)} < 0 \Leftrightarrow X \in]\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; 2[$$

Revenons au petit x :

$$\frac{2e^x - 1}{e^x - 2} < \frac{e^x}{e^x + 1} \Leftrightarrow x \in]\ln(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}); \ln(2)[$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation sont :

$$S =]\ln(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}); \ln(2)[$$

EXERCICE 3

Montrer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Il s'agit d'une application directe de la dérivabilité de la fonction exponentielle en zéro.
Soit $f(x) = e^x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$$

EXERCICE 4

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\left(\frac{3x^5 - 2x + 5}{2x^4 + 5x^2 + 3}\right)}$$

Posons tout d'abord :

$$u(x) = \frac{3x^5 - 2x + 5}{2x^4 + 5x^2 + 3}$$

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$u(x) = \frac{3x^5(1 - \frac{2}{3x^4} + \frac{5}{3x^5})}{2x^4(1 + \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^4})} = \frac{3}{2}x \times \frac{1 - \frac{2}{3x^4} + \frac{5}{3x^5}}{1 + \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^4}}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{3x^4} + \frac{5}{3x^5}}{1 + \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^4}} = 1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

Donc, d'après le théorème sur la limite composée de deux fonctions, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = +\infty$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{3x^4} + \frac{5}{3x^5}}{1 + \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{2x^4}} = 1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Donc, d'après le théorème sur la limite composée de deux fonctions, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{u(x)} = 0$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

EXERCICE 5

Déterminer la limite suivante des fonctions suivantes en $\pm\infty$.

1. $f(x) = \frac{5x-2}{e^x+1}$
Limite en $+\infty$:

Pour tout x non nul, on a :

$$\frac{5x-2}{e^x+1} = \frac{x(5-\frac{2}{x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{x}{e^x} \times \frac{5-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - \frac{2}{x} = 5$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{e^x} = 1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 5$$

On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-2}{e^x+1} = 0$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Limite en $-\infty$:

Beaucoup plus simple. On va déterminer la limite du numérateur puis celle du dénominateur.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x-2) = -\infty \text{ Et : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x+1) = 1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-2}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2. $g(x) = \frac{e^{x^5}-1}{x}$
Limite en $+\infty$:

Pour tout x non nul, on a :

$$\frac{e^{x^5}-1}{x} = x^4 \times \frac{e^{x^5}}{x^5} \times \left(1 - \frac{1}{e^{x^5}}\right)$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$$

Et :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^5} = +\infty$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{x^5}}\right) = 1$$

De plus, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$$

Et que :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^5}}{x^5} = +\infty$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Limite en $+\infty$:

On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$$

Et :

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^5} = 0$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x^5} - 1) = -1$$

Et comme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

On peut en conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

EXERCICE 6

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$$

Pour tout réel $x \neq \ln 5$, on a :

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5} = \frac{e^{2x}(1 + \frac{1}{e^{2x}})}{e^x(1 - \frac{5}{e^x})} = e^x \times \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{5}{e^x}}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right) = 1$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{e^x}\right) = 1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{5}{e^x}} = 1$$

Et comme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Nous pouvons en conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5} = +\infty$$

EXERCICE 7

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 e^{-x}$

Pour tout réel x , on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = -x$.

On a donc :

$$f(x) = u(x) \times e^{v(x)}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'ensemble des réels et $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -1$.

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = u'(x) \times e^{v(x)} + u(x) \times v'(x) e^{v(x)} = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2 - x) e^{-x}$$

2. $g(x) = e^{2x} \times \sqrt{x}$

Pour tout réel x positif non nul, on pose $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 2x$.

On a donc :

$$g(x) = u(x) \times e^{v(x)}$$

Donc :

$$g'(x) = u'(x) \times e^{v(x)} + u(x) \times v'(x) e^{v(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{2x} + 2\sqrt{x} \times e^{2x} = e^{2x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \right)$$

3. $h(x) = \frac{2e^x - 3x}{x^2 + e^x}$

Pour tout réel x , on pose $u(x) = 2e^x - 3x$ et $v(x) = x^2 + e^x$.

On a donc :

$$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Or, les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$: $u'(x) = 2e^x - 3$ et $v'(x) = 2x + e^x$.

Comme pour tout réel x , $v(x) \neq 0$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons sa dérivée.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2e^x - 3)(x^2 + e^x) - (2e^x - 3x)(2x + e^x)}{(x^2 + e^x)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} + 2x^2 e^x - 3e^x - 3x^2 - 2e^{2x} - xe^x + 6x^2}{(x^2 + e^x)^2} \\ &= \frac{(2x^2 - x - 3)e^x + 3x^2}{(x^2 + e^x)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(0) = 0$ et si $x \neq 0$:

$$f(x) = \sqrt{x} \times e^{-\frac{1}{x}}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la continuité de f en 0.

La fonction $e^{-\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est la composée de fonctions continues, et la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est un produit de fonctions continues.

Etudions à présent la continuité de f en 0.

La fonction racine est continue en 0, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$$

Et :

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{x}} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}^{\frac{-1}{x}}) = 0$$

Et que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

La fonction f est donc continue en 0.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la dérivabilité de f en 0.

La fonction $e^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est la composée de fonctions continues, et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est un produit de fonctions continues.

Etudions à présent la dérivabilité de f en 0.

Si $x > 0$, alors :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} \times e^{\frac{-1}{x}} = -\sqrt{x} \times \left(\frac{-1}{x}\right) \times e^{\frac{-1}{x}}$$

Or, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sqrt{x}) = 0$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$$

Et :

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{x}\right) \times e^{\frac{-1}{x}} = 0$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

La fonction f est dérivable en 0 et on a :

$$f'(0) = 0$$

EXERCICE 9

Soient les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

On désigne par C_f et $C - g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

Pour tout réel x , on a :

$$f(x) = xe^{-x} \left(\frac{1}{2}xe^x - e^x + 1 \right)$$

On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

Et que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}xe^x - e^x + 1 = 1$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

Et :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

Donc, d'après le théorème sur la limite de la composé de deux fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$$

Finalement, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a :

$$\frac{1}{2}x^2 - x = x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right)$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) = +\infty$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

Et :

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 - x - (-xe^{-x}) \right) = +\infty$$

Et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

On a :

$$h(x) = f(x) - g(x) = xe^{-x}$$

Et on a vu que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Qu'es-ce que cela veut dire ?

Eh bien, comme $f(x) = g(x) + h(x)$ et que la limite de $h(x)$ en l'infini vaut 0, la courbe C_g est une courbe asymptote à la courbe C_f .

4. Etudier la position relative des courbes C_f et C_g .

On a :

$$f(x) - g(x) = h(x) = xe^{-x}$$

Et $h(x)$ est du signe de x , donc C_f est au dessous de C_g sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ et C_f est au dessus de C_g sur $]0; +\infty[$.

De plus, les courbes se coupent au point d'abscisse 0.

Partie B

5. Montrer que la dérivée f' de f est :

$$f'(x) = (x - 1)(1 - e^{-x})$$

D'abord, la fonction f est dérivable sur l'ensemble des réels et pour tout réel x , la dérivée de f est :

$$f'(x) = x - 1 + e^x - xe^{-x} = (x - 1) - e^{-x}(x - 1) = (x - 1)(1 - e^{-x})$$

6. Etudier le signe de cette dérivée pour en déduire les variations de la fonction f .

On a :

$$1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

On en déduit aisément le tableaux de signes suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x - 1$	-	-	0	+	
$1 - e^x$	-	0	+	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

On en déduit facilement que f est strictement croissante sur $] - \infty; 0[$ et sur $[1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0; 1]$.

7. Dresser le tableau de variation des fonction f et g .

Le tableau de variations de la fonction f se déduit du tableau de signes précédent :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	0	$1/e - 1/2$	$+\infty$	

Pour la fonction g , on a :

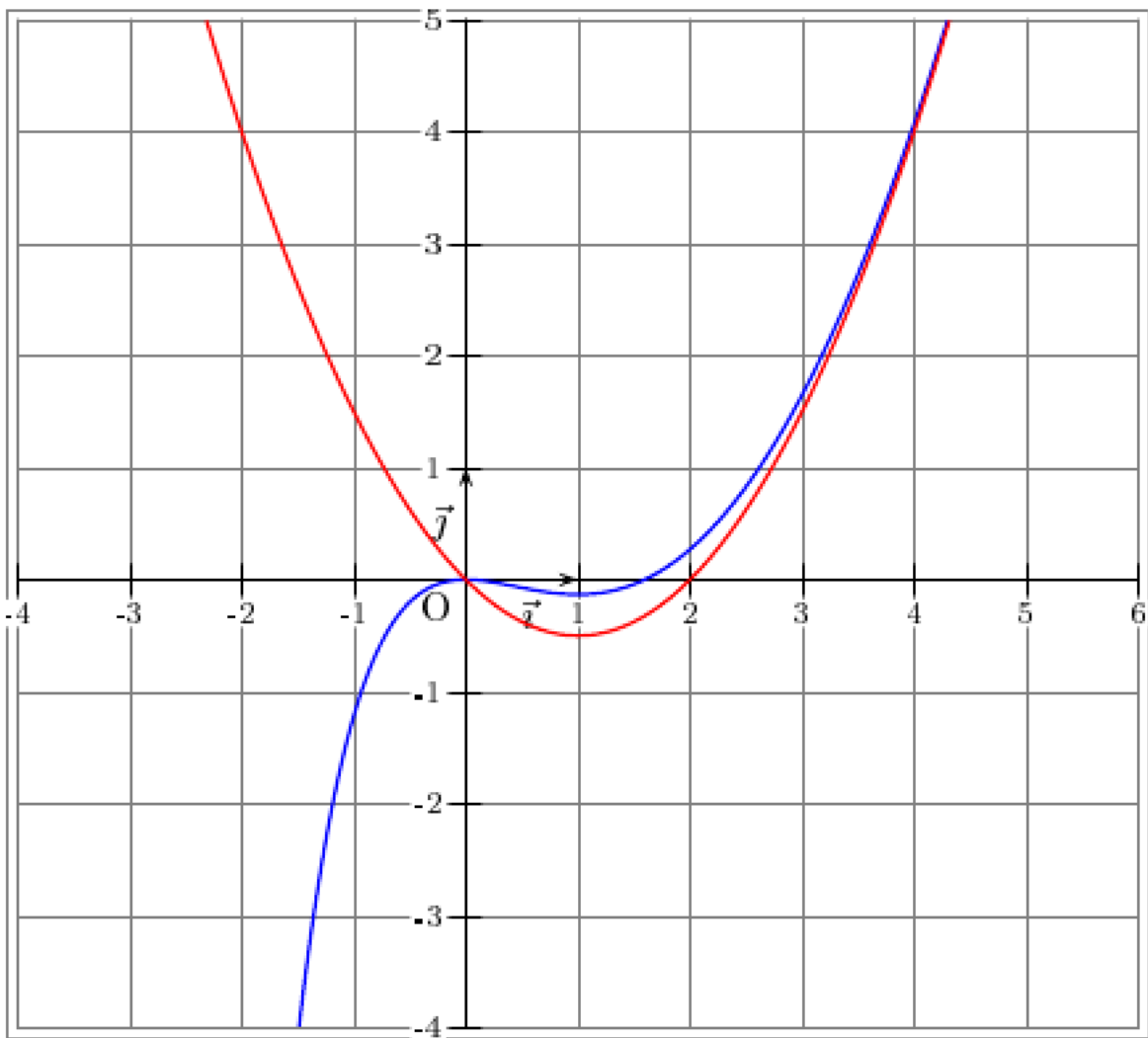
$$g'(x) = x - 1$$

Donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	$-1/2$	$-\infty$

8. Tracer C_f et C_g .

Voici les représentations graphiques des fonction f et g .



EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - x^2$$

Partie A

1. En dérivant deux fois la fonction f , déterminer les variations de cette fonction sur son domaine de définition.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$f'(x) = e^x - 2x$$

Et :

$$f''(x) = e^x - 2$$

Or, $x \geq 1$, donc : $e^x \geq e$ car la fonction exponentielle est croissante.

Ainsi $e^x - 2 \geq e - 2 > 0$ et $f''(x) > 0$.

Donc, f' est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, si $x \geq 1$, alors $f'(x) > f'(1)$ et comme $f'(1) = e - 2 > 0$, on a $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

2. Déterminer le signe de f .

Comme f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $u \geq 1$, alors :

$$f(x) \geq f(1)$$

Or,

$$f(1) = e - 1 > 0$$

Donc f est positive sur $[1; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = xe^{-x^2}$$

On appelle C_g sa courbe représentative.

3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x^2) > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > x^4 \Leftrightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow xe^{-x^2} < \frac{1}{x^3}$$

Donc, si $x \in [1; +\infty[$, alors :

$$0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x^3}$$

D'après le théorème des gendarmes, comme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

4. Justifier la décidabilité de g sur $[0; +\infty[$ avant de déterminer ses variations sur $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

La fonction $-x^2$ est dérivable sur $[0; +\infty[$, la fonction e^{-x^2} est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et enfin la fonction xe^{-x^2} , soit la fonction g , est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

On peut donc calculer sa dérivée.

Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$g'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

Donc, $f'(x)$ est du signe de $(1 - 2x^2)$ car $e^{-x^2} > 0$ (c'est une exponentielle).

$1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ On en déduit aisément le tableau de signes suivant.

x	0	x_2	$+\infty$	
$1 - 2x^2$	1	+	0	-
$g'(x)$	1	+	0	-

Nous lisons très bien que g est strictement croissante sur $[0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.

Voici donc le tableau de variations de la fonction g .

x	0	x_2	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
g	0		0

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à C_g au point d'abscisse 0.

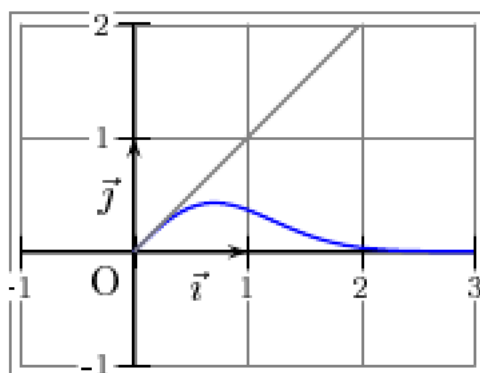
La fonction f est dérivable en 0, donc C_g admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation :

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$

Comme $g'(0) = 1$ et $g(0) = 0$, une équation de la tangente (T) à C_g au point d'abscisse $x = 0$ est donc :

$$y = x$$

6. Tracer la droite (T) et la courbe C_g .



Partie C

On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = x^3 e^{-x^2}$$

On appelle C_h sa courbe représentative.

7. Déterminer la limite de h en $+\infty$ en utilisant la partie A.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x^2) > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > x^4 \Leftrightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow x^3 e^{-x^2} < \frac{1}{x}$$

Donc, si $x \in [1; +\infty[$, alors :

$$0 \leq h(x) \leq \frac{1}{x}$$

D'après le théorème des gendarmes, comme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

8. Déterminer les variations de h sur $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$, on peut donc la calculer.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$h'(x) = 3x^2e^{-x^2} - 2x^4e^{-x^2} = x^2e^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

$h'(x)$ est donc du signe de $(3 - 2x^2)$ car $x^2e^{-x^2} > 0$.

Les racines du polynôme $(3 - 2x^2)$ se calculent facilement. Les voici : $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

On en déduit le tableau de signes de la fonction h .

x	0	x_2	$+\infty$	
$3 - 2x^2$	+	0	-	
x^2	0	+	+	
$h'(x)$	0	+	0	-

On en déduit que h est strictement croissante sur $[0; \sqrt{\frac{3}{2}}]$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty]$.

9. Déterminer les positions relatives de C_g et C_h .

Pour déterminer la position relative de ces deux courbes, on étudie le signe de $g(x) - h(x)$.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$g(x) - h(x) = xe^{-x^2} - x^3e^{-x^2} = x(1 - x^2)e^{-x^2}$$

Le signe de $g(x) - h(x)$ est celui de $x(1 - x^2)$.

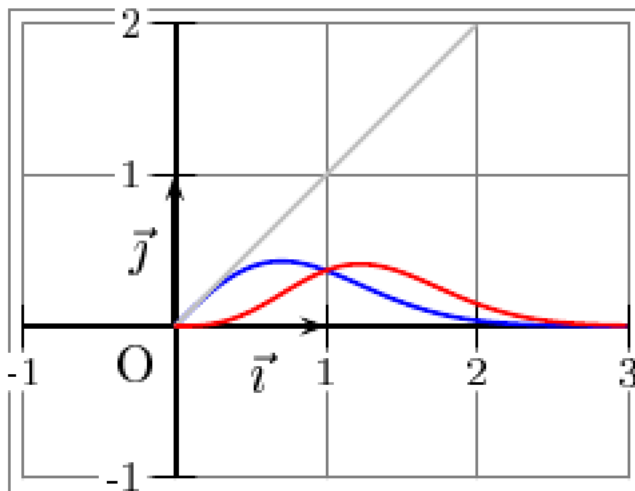
Voici le tableau de signes correspondant.

x	0	1	$+\infty$	
x	0	+	+	
$1 - x^2$		+	0	-
$g(x) - h(x)$	0	+	0	-

Donc : C_g est au dessus de C_h sur $]0; 1[$, C_g est en dessous de C_h sur $]1; +\infty[$ et les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

10. Tracer C_g et C_h .

Voici les tracé dans un graphique.



EXERCICE 11

La suite (u_n) est définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de cette suite.

1. Montrer que, pour tout réel x , on a : $1 + x \leq e^x$.
En déduire que si $n \geq 1$, alors $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

On sait que $1 + x \leq e^x$ (cela se démontre très facilement).

En posant $x = \frac{1}{n}$, on a : si $n \geq 1$, alors :

$$1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}}$$

Donc, la fonction x^n , n naturel non plus, étant croissant sur $[0; +\infty[$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

2. En posant $X = -x$, montrer que si $X < 1$, alors $e^X \leq \frac{1}{1-X}$.
En déduire que si $n \geq 1$, alors $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

On pose $X = -x$.

Si $X < 1$, alors $0 < 1 - X - e^{-X}$ et donc :

$$e^X \leq \frac{1}{1-X}$$

Or : $X = \frac{1}{n+1}$ donne :

$$\frac{1}{1-X} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Et :

$$e^X = e^{\frac{1}{n+1}}$$

En utilisant la question précédente, on obtient :

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

3. En déduire que si $n \geq 1$, alors $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}$.

D'après les questions précédentes, pour tout $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Donc :

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Or :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n}$$

Donc :

$$0 \leq e - u_n^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n} \leq \frac{e}{n} \leq \frac{3}{n}$$

4. En conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e - u_n) = 0$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$$