Généralités sur les fonctions

Voici un chapitre qui reprends toutes les notions sur les fonctions vues jusqu'ici, en y rajoutant quelques-unes. C'est la totalité des notions à savoir pour l'épreuve du Baccalauréat Scientifique.

I - Rappels

Commençons par quelques rappels.

Définitions : Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction.

Définir une fonction f de D sur $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un réel unique noté $f(x)$.

On appelle **ensemble de définition** (ou domaine de définition) l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction f existe.

On appelle **image** de x par f le nombre $f(x)$.

On appelle **antécédent** de y le nombre x telle que $f(x) = y$.

Le **tableau de valeurs** d'une fonction f regroupe les coordonnées d'un certain nombre de points de la courbe à intervalles réguliers.

On appelle **pas** l'écart régulier entre deux valeurs successives de x.

La représentation graphique (ou la courbe représentative) de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x appartient à D ($x \in D$).

II - Sens de variation

La définition de **sens de variation** d'une fonction est à maîtriser absolument. Cependant, nous allons aisément la compléter cette année dans le chapitre Dérivation.

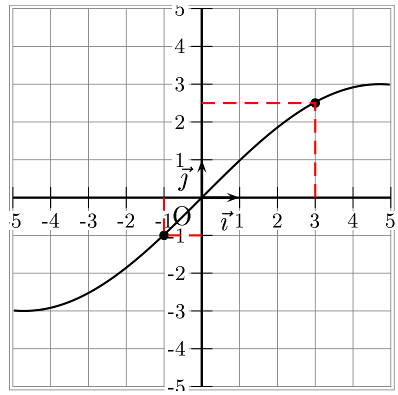
Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D et I un intervalle de D.

- f est **croissante** sur I si et seulement si pour tout x_1, $x_2 \in I$, tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,
- f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tout x_1, $x_2 \in I$, tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,
- f est **constante** sur I si et seulement si il existe un $k \in \mathbb{R}$ (un réel k) tel que pour tout réel x de I on $f(x) = k$.

Je vais tout vous interpréter.

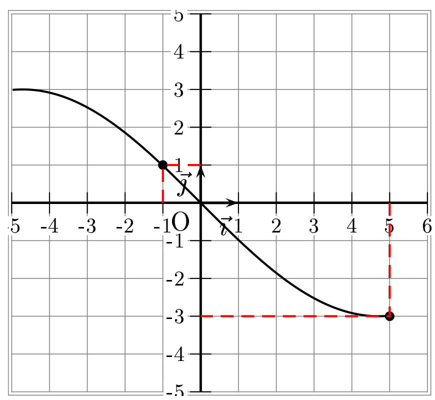
Interprétation :

- Pour une fonction croissante, plus on avance dans les x croissants, plus on avancera dans les $f(x)$ croissants. Pour un premier x_1, on aura l'image $f(x_1)$, et pour un x_2 plus grand que x_1, on aura un $f(x_2)$ plus grand que le $f(x_1)$. Donc la fonction monte au fur et à mesure qu'on avance dans les x, elle **croît**.



On voit bien que pour $x_1 = -1 \leqslant x_2 = 3$, on a $f(x_1) = -1 \leqslant f(x_2) = 2,5$.

- Pour une fonction décroissante, plus on avance dans les x croissants, plus on avancera dans les $f(x)$ décroissants. Pour un premier x_1, on aura l'image $f(x_1)$, et pour un x_2 plus grand que x_1, on aura un $f(x_2)$ plus petit que le $f(x_1)$. Donc la fonction descend au fur et à mesure qu'on avance dans les x, elle **décroît**.



On voit bien que pour $x_1 = -1 \leqslant x_2 = 5$, on a $f(x_1) = 1 \geqslant f(x_2) = -3$.

III - Maximum et minimum

Soit une fonction croissante sur un intervalle D_1, puis décroissante sur un intervalle D_2, et encore croissante sur un intervalle D_3, etc. Elle passera par un maximum et un minimum (si elle ne pars pas à l'infini). C'est le sujet de cette deuxième section.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D et I un intervalle de D et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geqslant f(a)$,
- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f est **majorée** par le réel M sur D si pour tout réel x de D, $f(x) \leqslant M$,
- On dit que f est **minorée** par le réel m sur D si pour tout réel x de D, $f(x) \geqslant m$,
- Une fonction majorée et minorée sur D est **bornée**.

En fait, si toutes les valeurs de $f(x)$ sont supérieurs à la valeur $f(a)$, c'est que $f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction. $f(a)$ est le minimum de la fonction.
Et si toutes les valeurs de $f(x)$ sont inférieurs à la valeur $f(a)$, c'est que $f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction. $f(a)$ est le maximum de la fonction.

IV - Parité et périodicité

On distingue des fonctions paires et des fonctions impaires.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D.
La fonction f est **paire** si pour tout éléments x de D, $f(-x) = f(x)$ (avec $-x$).

Sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D.
La fonction f est **impaire** si pour tout éléments x de D, $f(-x) = -f(x)$. (avec $-x$)

Sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Attention : Si une fonction n'est pas paire, elle n'est pas forcément impaire (et inversement). Une fonction peut être ni paire ni impaire.

Exemples : Voici un exemple de chaque.

- La fonction $f(x) = x^2 - 1$ est paire.
  En effet : $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$ car un carré est toujours positif.

- La fonction $f(x) = \frac{2x^2+3}{x}$ est impaire.
  En effet : $f(-x) = \frac{2(-x)^2+3}{-x} = \frac{2x^2+3}{-x} = -\frac{2x^2+3}{x} = -f(x)$.

- La fonction $f(x) = x^2 + 2x - 1$ n'est ni paire ni impaire.
  En effet : $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1 = x^2 - 2x - 1 \neq \pm f(x)$.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D.
La fonction f est **périodique** si pour tout éléments x de D, $f(x+T) = f(x)$.

Sa courbe représentative est invariante par toute translation de vecteur $nT\overrightarrow{i}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $\overrightarrow{i}$ le vecteur dirigeant l'axe des abscisses.

Exemple : Les fonctions trigonométrique cos et sin sont périodiques de période 2π.

V - Fonctions usuelles

Quelques fonctions usuelles s'ajoutent à la liste de l'année dernière.

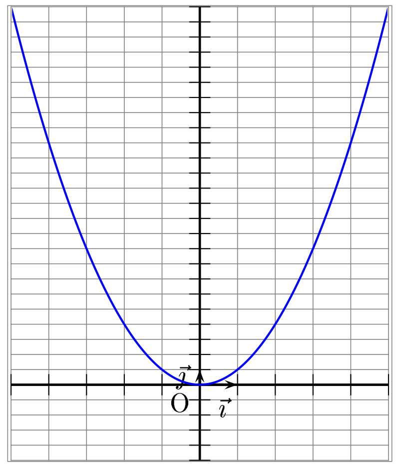
Définition : La **fonction carrée** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

La fonction carrée est une fonction paire. Donc, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Elle est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

La courbe représentative de la fonction carrée est une **parabole**.

Voici sa représentation graphique :

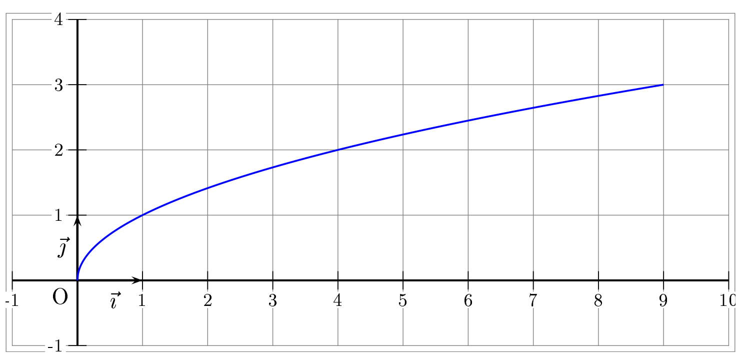


Définition : La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

La fonction racine carrée est une strictement positif.

Elle est croissante sur $[0; +\infty[$.

La courbe représentative de la fonction racine carrée la suivante.

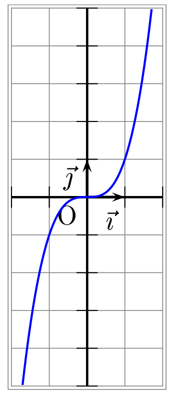


Définition : La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

La fonction cube est une fonction impaire. Donc, ayant pour centre de symétrique l'origine du repère.

Elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Voici sa représentation graphique :



Définition : La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (appelé aussi $\mathbb{R}^+$) par $f(x) = \frac{1}{x}$.

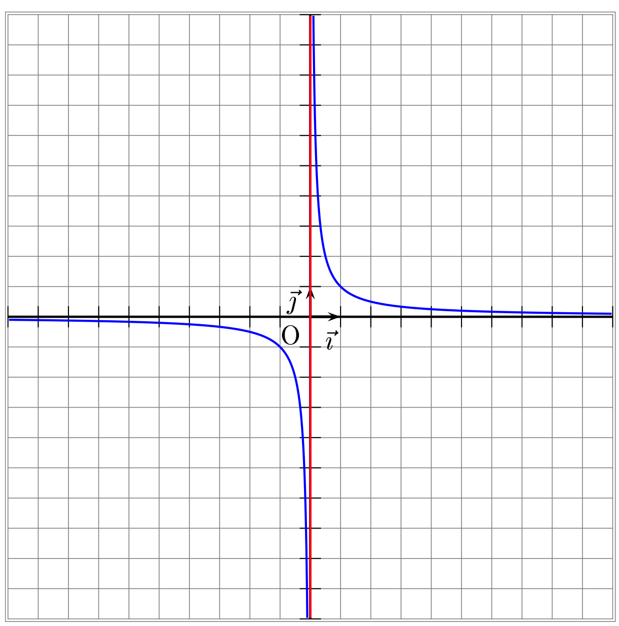
La fonction inverse est une fonction impaire. Donc, son centre de symétrie est l'origine du repère.

Elle est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

La courbe représentative de la fonction carrée est une **hyperbole**.

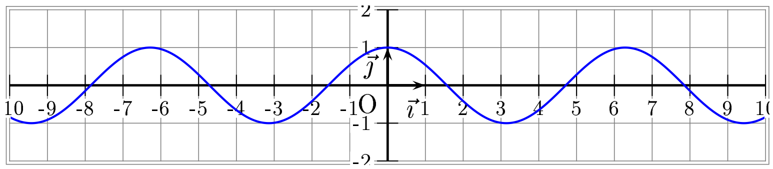
Elle possède une **asymptote verticale** en $x = 0$ et une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$. En effet, 0 est une valeur interdite (donc asymptote verticale), et elle ne peut pas être nulle (donc asymptote horizontale).

Voici sa représentation graphique :

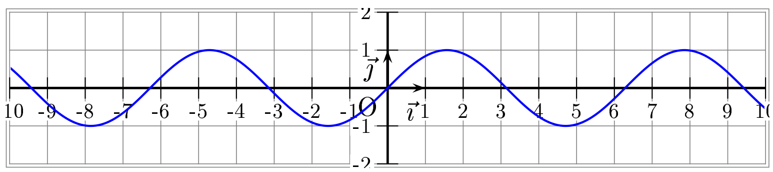


Définitions :

- La **fonction cosinus** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$.
  C'est une fonction paire et **périodique** de période 2π, c'est-à-dire qu'elle se répète tous les 2π.
  Elle est croissante sur $[-\pi; 0]$ et décroissante sur $[0; \pi]$.
  La courbe représentative de la fonction cosinus est une **sinusoïde**.



- La **fonction sinus** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.
  C'est une fonction impaire et **périodique** de période 2π.
  Elle est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.
  La courbe représentative de la fonction sinus est une **sinusoïde**.



VI - Opérations sur les fonctions

Nous allons voir maintenant que l'on peut effectuer des opérations sur des fonctions.

Commençons par la somme de deux fonctions.

Définition : Soient f et g deux fonctions définie sur I.
La fonction $f + g$ est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La courbe représentative de cette fonction se déduit point par point à partir de la courbe de f en ajoutant les ordonnées.

Propriétés : Soient f et g deux fonctions définie sur I.

- Si f et g sont deux fonctions croissantes, alors la fonction $f + g$ est aussi une fonction croissante,
- Si f et g sont deux fonctions décroissantes, alors la fonction $f + g$ est aussi une fonction décroissante.

Et maintenant : la multiplication d'une fonction par un réel k.

Définition : Soit f une fonction définie sur I et $k \in \mathbb{R}$.
La fonction kf est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$(kf)(x) = k \times f(x)$$

La courbe représentative de cette fonction se déduit point par point à partir de la courbe de f en multipliant l'ordonnée $f(x)$ par k.

Propriétés : Soit f une fonction définie sur I et $k \in \mathbb{R}$.

- Si $k > 0$, alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation,
- Si $k < 0$, alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés.

Puis le produit de deux fonctions.

Définition : Soient f et g deux fonctions définie sur I.
La fonction $f \times g$ est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

Et leur quotient.

Définition : Soient f et g deux fonctions définie sur I, tel que $g(x) \neq 0$ pour tout réel x.
La fonction $\frac{f}{g}$ est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Une opération nouvelle à présent : la composition.

Définition : Soient f une fonction définie sur I et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.
La fonction $g \circ f$ (on dit "g rond f")est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

En fait, on remplace la variable de la fonction g par la fonction f.

Exemple : Soient deux fonctions $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
Si on veut $g \circ f$:

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = 3(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$$

Vous avez saisie l'idée ?
Je vous laisse terminer le calcul.

Propriétés : Soient f une fonction définie sur I et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.

- Si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$est croissante,
- Si f et g ont des sens de variation opposés, alors, $g \circ f$est décroissante.

Toutes ces notions sur les opérations de fonction vont vous aider à étudier les variations des fonctions.
Vous pourrez considérez que la fonction à étudier est une somme, un produit, un quotient de deux fonctions, ou alors une fonction multiplier par un coefficient (k rappelez-vous).
Vous utiliserez ainsi les propriétés que je viens de vous apprendre.

Exemple : La fonction $f(x) = x^2 + 3x$ est croissante sur $[0; +\infty[$.
En effet :

- La fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$,
- La fonction x est croissante sur $[0; +\infty[$, donc la fonction $3x$ l'est aussi par produit de fonction par une réel,
- Par somme de deux fonctions : la fonction $x^2 + 3x$ (la fonction f) est croissante sur $[0; +\infty[$.

VII - Transformations

Dans cette partie nous allons vous que nous pouvons très facilement déplacer une fonction vers le haut ou vers le bas et même vers la gauche ou vers la droite.

Soit la fonction $f(x)$ et $k \in \mathbb{R}$.

Quel sera le signe de $f(x) + k$?

- Si $k > 0$, alors la fonction $f(x) + k$ sera la fonction f déplacée vers le haut de k unités,
- Si $k < 0$, alors la fonction $f(x) + k$ sera la fonction f déplacée vers le bas de k unités,

Quel sera le signe de $f(x + k)$?

- Si $k > 0$, alors la fonction $f(x + k)$ sera la fonction f déplacée vers la gauche de k unités,
- Si $k < 0$, alors la fonction $f(x + k)$ sera la fonction f déplacée vers la droite de k unités,