Probabilités

Un chapitre important cette année, qui suit directement celui des statistiques, c'est le chapitre des probabilités.
Dans ce chapitre, je vais vous faire quelques rappels de 3ème sur le vocabulaire à utiliser et nous verrons nos premiers calculs de probabilités ensemble.
Une partie sera consacrée à l'analyse combinatoire avec notamment les coefficients binomiaux, les combinaisons et le triangle de Pascal et une autre sur les différentes lois de probabilités discrètes telles que les variables aléatoires, la loi de Bernouilli et la loi binomiale.

I - Probabilités sur un ensemble fini

On démarre cette première partie avec les probabilités sur un ensemble fini dans laquelle je vais vous définir ou vous redéfinir le vocabulaire à employer lorsque l'on aborde les probabilités.

1 - Ensembles

Vous devez d'abord savoir ce qu'est un ensemble, indispensable pour apprendre à calculer des probabilités.

Ensembles : Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.

- L'ensemble $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E commun à A et B.
- L'ensemble $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent soit à A soit à B.
- L'ensemble $\bar{A}$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartient pas à A.
- $Card(A)$ est le nombre d'éléments de A.

Il n'y a rien à dire pour le moment, ce ne sont que des définitions de rappels, enfin j'espère...

2 - Évènements

Les **événements** sont la notion principale en probabilité, vous allez comprendre pourquoi.

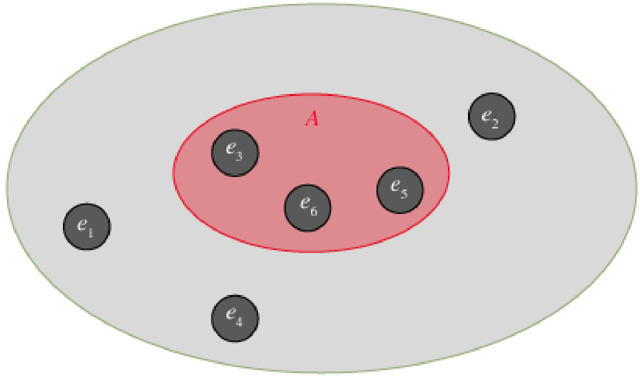
Evénements : Un événement est un ensemble d'éventualités.

Exemple : Toujours ce même exemple de dé à 6 faces. Oui, je vais vous bassiner avec cet exemple dans ce cours, mais c'est de loin le plus facile à utiliser car c'est celui que vous connaissez le mieux.

On va considéré l'événement E suivant : "obtenir un multiple de 3 ou de 5".

Quel chiffre (de 1 à 6) est multiple de 3 ou 5 ? Oui, 3 et 6 sont multiples de 3 et seul 5 est multiple de 5.

Je vais donc vous représenter l'ensemble des éventualités dans une patate et l'événement A qui contiendra les éventualités e_3, e_5 et e_6.



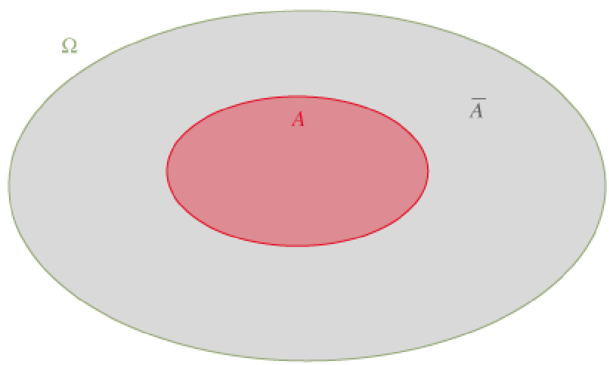
3 - Évènements contraire

Rien qu'avec leurs noms, vous devez savoir de quoi ça parle.

Evénement contraire : On appelle événement contraire de l'événement A, noté $\bar{A}$, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A.

La probabilité de l'**événement contraire** de A est égale à :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



Vous en avez marre du lancé de dé ? Bon alors pour cette fois je vais vous prendre un autre exemple, mais pour cette fois seulement.

Exemple : Prenez un jeu de boules avec dans un sac 3 boules blanches et 3 boules noires.

Soit l'événement E suivant : "tirer une boule blanche".

L'**événement contraire** de E, que l'on note $\bar{E}$ est : "tirer une boule noire".

4 - Évènements incompatibles

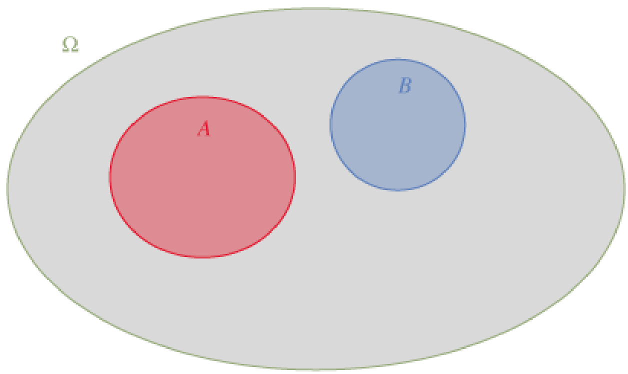
Là aussi, cela devrait vous paraître évident.

Evénements incompatibles : Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire simultanément.

Soient A et B deux événements incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Cela se comprend très bien. Regardez ce dessin.



Exemple : Les événements "avoir un 1" (toujours sur le lancé de dé oui) et "avoir un 6" sont **incompatibles** car on ne peut pas tomber sur le 1 et le 6 en même temps.

5 - Propriétés des probabilités

Bon, revenons sur les différentes propriétés apprises jusqu'ici et je vais même vous en ajouter une dernière, très importante.

Propriétés des probabilité :
– La probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

– $p(\varnothing) = 0$.

– $p(\Omega) = 1$.

– $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

– $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

II - Analyse combinatoire

Cette partie va peut-être vous faire un peut peur mais ne vous inquiétez pas, je vais tout vous expliquer. Ce ne sont que des nouvelles choses, qui deviendront des évidences pour vous ensuite.

1 - Combinaisons et coefficients binomiaux

Voici les définitions de combinaisons et de coefficient binomial.

Combinaisons et coefficients binomiaux : Soient un ensemble E de cardinal n (toujours naturel) et p un entier naturel inférieur ou égal à n.

Le nombre de parties de E possédant p éléments, appelées **combinaisons de** p **éléments**, est égal au **coefficient binomial** noté :

$$\binom{n}{k}$$

Mais qu'es-ce que c'est que ce truc ?

J'y viens dans les propriétés suivantes. Mais d'abord je vous rappelle comment se calcule un coefficient binomial.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Second rappel :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$$

Exemple :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{(1 \times 2)(3)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{2(1 \times 2 \times 3)} = \frac{120}{2 \times 6} = \frac{120}{12} = 10$$

Propriétés et formules des coefficients binomiaux : Soient n un entier naturel non nul et p un entier naturel inférieur ou égal à n. On a alors les propriétés suivantes :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

2 - Triangle de Pascal

Voilà une partie interessante, vous allez aimer. Mais avant, une petite propriété, que vous n'allez pas aimer.

Formule de Pascal : Soient n un entier naturel non nul et p un entier naturel strictement inférieur à n.

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

De cette formule qui paraît compliquée, on construit le triangle de Pascal :

n/p	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
...	...	...	...	...	...	...

En fait, comment on remplie ce tableau, c'est très simple. Chaque case est l'addition de celle au dessus et celle à sa diagonale de gauche. Par exemple, on obtient 6 en faisant 3 + 3. Ou encore 4 en faisant 3 + 1.

Et à quoi sert ce triangle de Pascal au juste ?

A vous aider à calculer des coefficients binomiaux ! En effet, chaque case représente le coefficient binomial suivant :

$$\binom{n}{p}$$

Ainsi, dans ce triangle, on a les valeurs suivantes :

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}$$

III - Variables aléatoires

Dans cette partie, je vais vous apprendre des formules importantes en probabilités : l'espérance, la variance et l'écart-type. Ces mots ne vous sont pas inconnus ? Normal, vous les avez déjà utilisé en statistiques.

1 - Définition d'une variable aléatoire

On commence par la définition d'une variable aléatoire.

Variable aléatoire : Une **variable aléatoire** réelle est une fonction qui associe un réel à chaque événement de l'univers d'une expérience aléatoire.

2 - Loi de probabilité

Voici la loi de probabilité.

Loi de probabilité : Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs :

$$X(\Omega) = x_1; x_2; ...; x_n$$

La loi de probabilité de X associe à chaque réel x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

Exemple : On tire au hazard une carte dans un jeu de 32 cartes.
L'univers est l'ensemble des 32 cartes.
On définit la variable aléatoire X : tirer un As rapporte 10, tirer une figure rapporte et tirer une autre carte ne rapporte rien.

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont : 0 ; 1 ; 10, c'est-à-dire :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 10\}$$

On a alors :

$\{X = 10\} = \{$As de $\heartsuit$; As de $\diamondsuit$; As de $\clubsuit$; As de $\spadesuit\}$
$\{X = 1\} = \{$toutes les figures$\}$
$\{X = 0\} = \{$toutes les cartes sauf les As et les figures$\}$

En probabilités, cela donne :

$P(\{X = 10\}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
$P(\{X = 1\}) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$
$P(\{X = 0\}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

On représente en général une loi de probabilité dans un tableau :

x_i	0	1	10
$P(\{X=x_i\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3 - Espérance

Définissons l'espérance d'une variable aléatoire tout de suite.

Espérance : L'**espérance** d'une variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Sans le symbole de somme, cela donne ceci :

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + ... + x_n P(X = x_n)$$

Petite propriété en plus.

Propriété de l'espérance : Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

4 - Variance

Définissons à présent la variance d'une variable aléatoire.

Variance : La **variance** d'une variable aléatoire X est le réel :

$$V(X) = \sum_{i=0}^{n} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)$$

En fait, l'expression de la variance est celle-ci :

$$V(X) = [x_1 - E(X)]^2 P(X = x_1) + [x_2 - E(X)]^2 P(X = x_2) + ... + [x_n - E(X)]^2 P(X = x_n)$$

Donc, avant de pouvoir calculer la variance d'une variable aléatoire, il va falloir calculer son espérance.

Propriété de la variance : Pour tous réels a et b :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Ca peut toujours servir...

5 - Ecart-type

Une dernière définition, celle de l'écart type en probabilités.

Ecart-type : L'**écart-type** d'une variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Donc, avant de pouvoir calculer l'écart-type d'une variable aléatoire, il va falloir calculer sa variance après avoir préalablement calculer son espérance.

IV - Loi de Bernouilli

Voici une loi importante en probabilité et en plus très simple à comprendre vous allez voir. Je vous l'énonce tout de suite.

Loi de Bernouilli : Soit un réel p compris entre 0 et 1.

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles :
– **succès**, de probabilité p,
– **échec**, de probabilité $1-p$,

Une variable aléatoire suit la **loi de Bernouilli de paramètre** p si :
– $X(\Omega)=\{0;1\}$,
– $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.

Dans le cas d'une loi de Bernouilli, on a l'espérance et la variance suivantes.

Théorème : Si X suit la loi de Bernouilli de paramètre p, on a alors :

– $E(X)=p$,
– $V(X)=p(1-p)$,

Tout simplement.

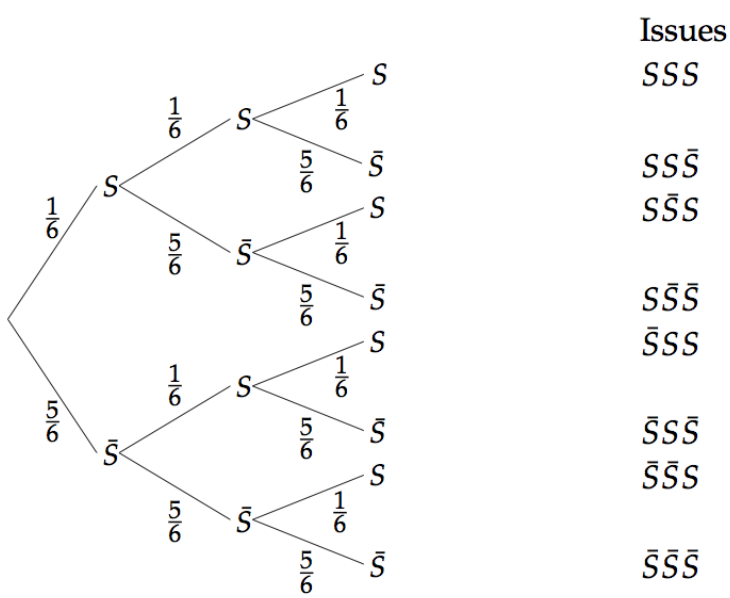
V - Loi binomiale

Nous allons cette fois-ci traiter la loi binomiale à travers l'exemple du lancé de dés.

Lorsque le 6 apparaît, le joueur a gagné. On appelle S cet événement.
Sinon, le joueur a perdu.
Le dé est lancé trois fois par joueur.
Quelle est la probabilité de gagner une fois, deux fois, trois fois et aucune fois ?

Pour répondre à cette question, nous utiliserons un arbre construit de la façon suivante : 3 lancés donc trois niveaux. Soit, au premier lancé il gagne, soit il perd. Soit au second il gagne, soit il perd. Et ainsi de suite.

Voici l'arbre pondéré.



Appelons X_i l'événement "le joueur a obtenu i six, soit i succès.

X_0 est l'événement "obtenir 0 succès". Cet événement est obtenu par un seul chemin, celui tout en bas :

$$P(X_0)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$

X_1 est l'événement "obtenir 1 succès". Cet événement est obtenu en utilisant trois chemins :

$$P(X_1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{72}$$

X_2 est l'événement "obtenir 2 succès". Cet événement est obtenu en utilisant trois chemins :

$$P(X_2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

X_3 est l'événement "obtenir 3 succès". Cet événement est obtenu par un seul chemin, celui tout en haut :

$$P(X_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

La loi de probabilité décrivant cette expérience sert appelé loi binomiale.

Loi binomiale : Soit un réel p compris entre 0 et 1 et n un entier naturel non nul.

Le **nombre de succès** dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Une variable aléatoire suit ainsi la **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $B(n;p)$, si :
- $X(\Omega) = [|0;n|]$,
- $\forall k \in [|0;n|]$:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le nombre de possibilités de placer les k succès parmi les n répétitions est égal au coefficient :

$$\binom{n}{k}$$

Pareil que pour la loi de Bernouilli, pour la loi binomiale, il y a des simplicité dans les calculs de l'espérance et de la variance.

Théorème : Si X suit la loi de binomiale de paramètres n et p, on a alors :

- $E(X) = np$,
- $V(X) = np(1-p)$,