Suites numériques

Sans le savoir, vous avez déjà rencontré des suites numériques dans votre vies, par exemple au tirage du loto. En effet, on tire un certain nombre de nombres les uns à la suite des autres, au hasard bien sur, et on les classe en nombre numéro 1, nombre numéro 2, etc.
Dans ce chapitre, je vais vous faire découvrir de plus prêt la notion de **suite numérique**. Vous allez voir, vous allez adorer.

www.mathsbook.fr

I - Définition suite numérique

Qu'es-ce qu'une suite numérique ? Commençons par cela.

Définition : Soient $a \in \mathbb{N}$ et $I_a = \{n \in \mathbb{N}, n \geqslant a\}$, I_a est en fait l'ensemble des entiers naturels à partir de a.
On appelle **suite numérique** la fonction u de I_a dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} I_a & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{cases}$$

Notation : On notera $u(0)$ u_0, $u(1)$ u_1, etc.
u_n s'appelle **terme** de la suite numérique.

II - Modes de définitions d'une suite numérique

1 - Mode explicite

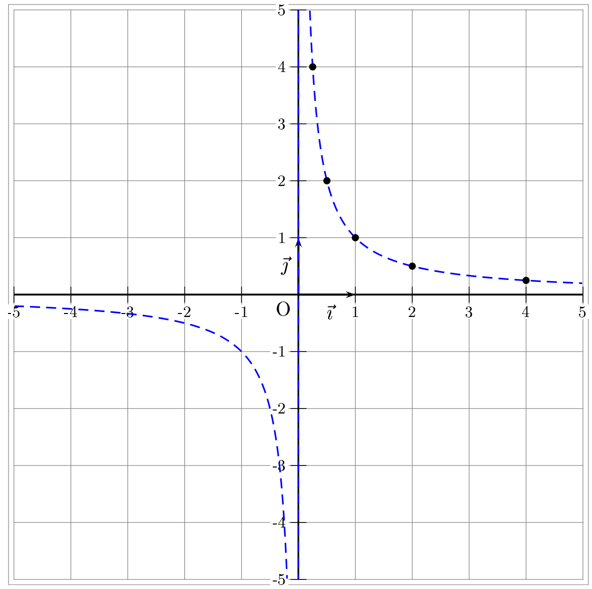
Il y a plusieurs façons de définir une suite numérique. C'est ce que nous allons voir dans cette section en commençant par le mode explicite à l'aide de fonction.

Mode explicite : Le terme général de la suite est exprimé en fonction de n :

$$u_n = f(n)$$

On remplace tout simplement le x de la fonction par le n de la suite.

Exemple : Si on veut représenter la suite u_n telle que $u_n = \frac{1}{n}$, cela ne sera rien d'autre que la fonction inverse **prises aux abscisses entiers naturels**.



Remarque importante : Une suite numérique est définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Donc, si l'on représente une suite sur un graphique, on n'aura que des abscisses naturels et des ordonnées réels. N'oubliez jamais cela. C'est une cause très fréquente d'erreur.

2 - Mode récurrent

Le mode récurrent est plus utilisés pour les suites numériques.

Mode récurrent : Une suite numérique est définie par la donnée de son premier terme et d'un procédé qui permet de déterminer les suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ u_0 & & \end{array}\right.$$

On utilise le terme u_0 pour calculer u_1, le terme u_1 pour calculer u_2, etc.
Regardez l'exemple qui suit.

Exemple : Déterminer les cinq premiers termes de la suite numérique suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 3 \\ u_0 & = & 2 \end{array}\right.$$

Nous avons déjà u_0 qui vaut 2. Utilisons-le pour déterminer u_1 en utilisant la première ligne comme ceci :

$$u_1 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$$

Facile, non ? Continuons ainsi pour les autres termes.

$$u_2 = u_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$u_3 = u_2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$u_4 = u_3 + 3 = 11 + 3 = 14$$

Nous avons terminé.

Nous avons donc toujours besoin du terme $(n-1)$ pour calculer le terme n ?
Oui. Mais ne vous en faites pas, on ne vous demandera jamais de calculer le u_{1000} sans vous faciliter la tache.

Nous pouvons aussi déterminer les termes de la suites graphiquement. Regardez l'exemple suivant.

Exemple : Déterminons graphiquement les quatre premiers termes de la suite numérique définie par :

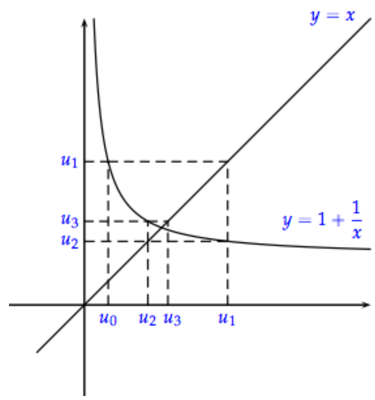
$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 1 + \frac{1}{u_n} \\ u_0 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.
Traçons les courbes de f et la courbe d'équation $y = x$ dans un même graphique.

On représente $u_0 = \frac{1}{2}$ sur l'axe des abscisses.
On remonte à partir de l'abscisse u_0 jusqu'à toucher la courbe. L'ordonnée du point d'intersection obtenu est noté u_1.

Maintenant, soyez attentif, nous allons tracer un trait horizontal à partir de l'ordonnée u_1 jusqu'à toucher la courbe d'équation $y = x$. L'abscisse de ce point d'intersection est u_1.
On fera ainsi pour trouver tous les termes de la suite numérique.

Je résume tout ça sur la courbe qui suit.



III - Suite arithmétique

On peut classer les suites numériques en fonction de l'évolution de leur terme.
Voici une définition des suites dites **arithmétiques**.

Définition : On appelle **suite arithmétique** de premier terme u_0 et de **raison** r la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + r \\ u_0 & & \end{cases}$$

Qu'es-ce que cela veut dire concrètement ?
Je prend un exemple pour vous l'expliquer.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + 5 \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Cette suite est une suite arithmétique de raison 5.
Si l'on calcule les cinq premiers termes de cette suite,

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = u_0 + 5 = 1 + 5 = 6$$

$$u_2 = u_1 + 5 = 6 + 5 = 11$$

$$u_3 = u_2 + 3 = 11 + 5 = 16$$

$$u_4 = u_3 + 3 = 16 + 5 = 21$$

Que remarquez-vous ?
La différence de deux termes consécutifs est constante et égale à la raison 5. On augmente de 5 à chaque u_n suivant.

Ah, donc avec des suites arithmétiques nous allons pouvoir calculer le terme u_{1000} sans avoir à calculer les 1000 termes précédents ?

OUI ! On peut le faite en utilisant seulement le u_0 ou tout simplement, en prenant un autre terme de votre choix.

Propriétés :
– Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

– Si u est une suite arithmétique, alors pour tout $n \geqslant p$,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Dans l'exemple précédent, en utilisant la première formule, vous pouvez trouver le u_4 par exemple :

$$u_4 = u_0 + 4 \times 5 = 1 + 20 = 21$$

Ou en utilisant la deuxième :

$$u_4 = u_2 + (4-2) \times 5 = 11 + 2 \times 5 = 11 + 10 = 21$$

On vous demandera souvent de calculer la somme des termes d'une suite arithmétique.
Leur somme ? Et comment je fais ça moi ?
Ne paniquer pas, il y a une formule pour ça.

Propriété : Soit u une suite arithmétique.
La somme des termes de cette suite est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Vous pouvez réutilisez directement cette formule. Néanmoins, il faut bien que vous la compreniez.

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Le symbole

$$\sum_{n=0}^{n} u_n$$

signifie la somme de 0 à n de u_n, c'est-à-dire $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
La quantité $(n+1)$ signifie le nombre de terme (oui, tous les termes + le terme d'indice 0, ça fait $n+1$).
Le u_0 est le premier terme et u_n est le dernier.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + 4\ u_0 \\ & = & 3 \end{cases}$$

Cette suite est arithmétique de raison 4.
Calculons la somme des 100 premiers termes de cette suite.

$$\sum_{n=0}^{100} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} = \frac{(100+1)(u_0 + u_{100})}{2} = \frac{(100+1)(3 + u_{100})}{2}$$

Il va falloir calculer le dernier terme voulu, soit u_{100}. Aucun problème pour cela, on a la formule.

$$u_{100} = u_0 + 100 \times 4 = 3 + 400 = 403$$

Revenons à la formule de somme et concluons :

$$\sum_{n=0}^{100} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} = \frac{(100+1)(3 + u_{100})}{2} = \frac{(101)(3+403)}{2} = \frac{(101)(406)}{2} = \frac{41006}{2} = 20503$$

On peux vous demander de calculer la somme de tous les termes de la suite u_n en fonction de n. C'est pareil, sauf qu'on laisse le n tel quel.

IV - Suite géométrique

Une autre catégorie de suite à présent, les suites dites **géométriques**.

Définition : On appelle **suite géométrique** de premier terme u_0 et de **raison** q la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & qu_n \\ u_0 & & \end{cases}$$

Puis-je avoir une définition concrète pour cette catégorie de suite aussi s'il-vous-plaît ?
Si c'est demander si poliment.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n \\ u_0 & = & 4 \end{cases}$$

Cette suite est une suite géométrique de raison 2.
Si l'on calcule les cinq premiers termes de cette suite,

$$u_0 = 4$$

$$u_1 = 2 \times u_0 = 2 \times 4 = 8$$

$$u_2 = 2 \times u_1 = 2 \times 8 = 16$$

$$u_3 = 2 \times u_2 = 2 \times 16 = 32$$

$$u_4 = 2 \times u_3 = 2 \times 32 = 64$$

Que remarquez-vous ici ?
Le quotient de deux termes consécutifs est constant et égal à la raison 2. On multiplie de 2 à chaque u_n suivant.

Il existe aussi des propriétés pour calculer le 1000^{me} terme sans passer par les 1000 premiers.

Propriétés :
– Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors :

$$u_n = u_0 q^n$$

– Si u est une suite géométrique, alors pour tout $n \geqslant p$,

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Dans l'exemple précédent, en utilisant la première formule, vous pouvez trouver le u_4 par exemple :

$$u_4 = u_0 \times 2^4 = 4 \times 16 = 64$$

Ou en utilisant la deuxième :

$$u_4 = u_2 \times 2^{4-2} = 16 \times 2^2 = 16 \times 4 = 64$$

Il y a également une formule pour calculer la somme de tous les termes d'une suite géométrique. La voici.

Propriété : Soit u une suite géométrique.
La somme des termes de cette suite est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Vous pouvez aussi réutilisez directement cette formule. Mais il faut que vous la compreniez aussi bien que la précédente pour les suites arithmétiques.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \frac{1}{3}u_n \\ u_0 & = & 2 \end{array} \right.$$

Cette suite est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
Calculons la somme des 100 premiers termes de cette suite.

$$\sum_{n=0}^{100} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \times \frac{1-\frac{1}{3}^{100+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\sum_{n=0}^{100} u_n = 2 \times \frac{1-\frac{1}{3}^{101}}{\frac{2}{3}} = 2 \times (1-\frac{1}{3}^{101}) \times \frac{3}{2} = 3 \times (1-\frac{1}{3}^{101}) = 3 \times 1 = 3$$

La quantité $\frac{1}{3}^{101}$ est tellement réduite que $1-\frac{1}{3}^{101} \simeq 1$.
On peux vous demander de calculer la somme de tous les termes de la suite u_n en fonction de n. C'est pareil, sauf qu'on laisse le n tel quel.

Remarque : On peut vous demander de montrer qu'une suite v_n définie en fonction d'une autre suite (u_n) est géométrique.
Dans ce cas, Il suffit de montrer qu'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que $v_{n+1} = qv_n$.
Je vais vous donner un exemple pour vous montrer les directives à suivre.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n - 3 \\ u_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que la suite $v_n = u_n - 3$ est géométrique.
Il suffit donc de montrer qu'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que $v_{n+1} = qv_n$.
On part toujours de v_{n+1},

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$

On a utilisé la formule $v_n = u_n - 1$ et remplacé les n par des $n+1$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6$$

Or :

$$v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n = v_n + 3$$

Donc :

$$v_{n+1} = 2u_n - 6 = 2(v_n + 3) - 6 = 2v_n + 6 - 6 = 2v_n$$

Conclusion : v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

On peut alors écrire la chose suivante :

$$v_n = (-2) \times 2^n$$

V - Propriétés d'une suite

1 - Variations

Comme les fonctions, les suites ont des variations.

Définitions : Soit u_n une suite numérique.

- La suite (u_n) est dite **croissante** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$$
- La suite (u_n) est dite **strictement croissante** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$
- La suite (u_n) est dite **décroissante** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$$
- La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$$
- La suite (u_n) est dite **stationnaire** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$$

Le symbole $\forall$ signifie "pour tout".

Remarque : Pour une suite numérique, on ne dit pas "constante" mais "stationnaire".

Point méthode : Pour déterminer les variations d'une suite numérique, on calcule la quantité $u_{n+1} - u_n$,

- Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante,
- Si $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante,
- Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est décroissante,
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante,
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$, la suite (u_n) est stationnaire.

Exemple : La suite numérique u_n définie par : $u_n = n^2$ est croissante.
En effet :
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n2 = 2n + 1 \geqslant 0$$
Car n est un naturel.
Donc la suite u_n est croissante.

Remarque : Une suite n'est pas forcément croissante ou décroissante. Parfois, elle peuvent être ni croissante, ni décroissante. Un exemple type est la suite $u_n = (-1)^n$.

2 - Extremum

Qui dit variations, dit extremum.

Définitions : Soit u_n une suite numérique.

- La suite (u_n) est **majorée** si :
$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$
M est appelé le **majorant**.
- La suite (u_n) est **minorée** si :
$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$
m est appelé le **minorant**.
- Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Le symbole $\exists$ signifie "il existe" et le symbole / signifie "tel que".

Les notions de majoration et de minoration pour les suites numériques sont les mêmes qui pour les fonctions.