Equations de droites et systèmes linéaires

Ce chapitre tente de relier deux notions : les fonctions et les droites.

www.mathsbook.fr

I - Fonction affine et équation de droite

Un bref rappel sur les fonctions affines, que vous devez déjà bien connaître sur le bout des doigts.

Définition : Une **fonction affine** est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax + b$$

Avec a et b deux valeurs numériques fixées.

Et maintenant, un rappel aussi mais qui est très important pour la suite.

Définitions : Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et une fonction affine $f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle la droite $\mathcal{D}$ la représentation graphique de cette fonction f, de coefficient directeur a passant par le point B de coordonnées $(0; b)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- a s'appelle **le coefficient directeur** de la droite,
- b s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de la droite,
- La droite d'équation $y = ax + b$ est appelée **équation réduite** de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple : Tracer la droite d'équation $4y - x = 2$.

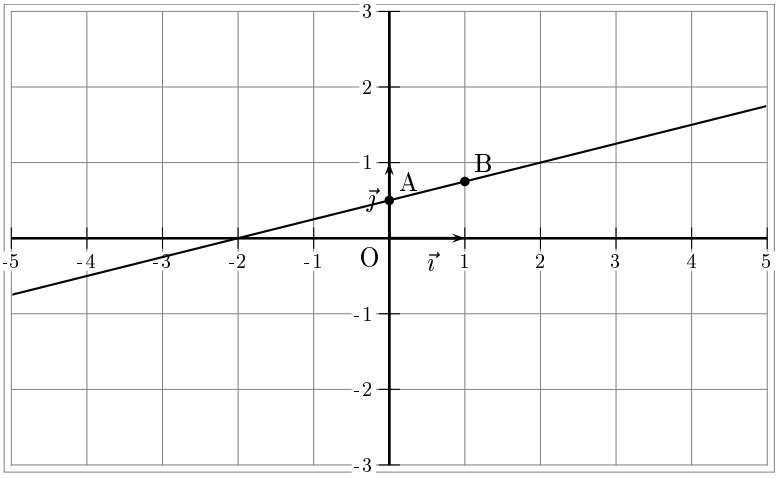
On veut une droite de la forme $y = ax + b$.

$$4y - x = 2 \Leftrightarrow 4y = x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

On a le point $A(0; f(0 = \frac{1}{2}))$.
On prend un second point, par exemple pour $x = 1$:

$$y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

On a donc le point $B(1; \frac{3}{4})$.
On place ces deux points dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. En les reliant, on a alors la droite d'équation $4y - x = 2$.



C'est possible dans l'autre sens ? Je veux dire, peut-on trouver une équation de droite en connaissant deux points de celle-ci ?
Oui, bien évidemment.

Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
L'équation de la droite est toujours de la forme : $y = ax + b$.
Le coefficient directeur de cette droite est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A partir de là, on pourra déterminer l'ordonné à l'origine (le b) en résolvant tout simplement l'équation : $y_A = ax_A + b$ (ou bien l'équation $y_B = ax_B + b$).

Exemple : Quelle est l'équation de la droite passant par $A(5; -2)$ et $B(-1; 3)$?.

L'équation de la droite est de la forme : $y = ax + b$.
Le coefficient directeur de cette droite est :

$$a = \frac{3 - (-2)}{-1 - 5} = \frac{5}{-6} = -\frac{5}{6}$$

Maintenant qu'on a le a, on peut retrouver facilement le b.

$$y_A = ax_A + b$$

$$-2 = -\frac{5}{6} \times 5 + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{25}{6} \Leftrightarrow b = -\frac{13}{6}$$

L'équation de la droite passant par $A(5; -2)$ et $B(-1; 3)$ est donc :

$$y = -\frac{5}{6}x - \frac{13}{6}$$

Remarque : Une autre méthode consiste dire que si un point $M(x_M; y_M)$ appartient à la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **colinéaires**. Et donc :

$$x_{\overrightarrow{MA}} \times y_{\overrightarrow{AB}} - y_{\overrightarrow{MA}} \times x_{\overrightarrow{AB}} = 0$$

En résolvant cette équation, on trouve aisément l'équation de la droite cherchée.

II - Droites parallèles

Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Quand es-ce que ces droites sont-elles parallèles ? Bonne question, non ?

Définition : Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur.

Donc, si on a $a = a'$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

Définition : Soit une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$.
Le vecteur $\overrightarrow{u}(1; a)$ est un vecteur directeur de cette droite.

C'est en fait ce vecteur $\overrightarrow{u}$ qui dirige la droite.
Attention : Ce vecteur n'est pas unique.

Exemple : Le vecteur $\overrightarrow{u}(1; 1)$ dirige la droite $y = x + 1$.

III - Système linéaire

1 - Résolution de systèmes

L'année dernière, vous aviez vu les systèmes de deux équations. Les revoilà avec la notion de droites.

Définition : Soit un système suivant de deux équations à deux inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont tous les couples $(x;y)$ qui vérifient les DEUX équations.

Mais quel est le rapport avec les droites ?
Le rapport ? Bien, ces deux équations sont deux équations de droites. On cherche le couple d'inconnue (ou de coordonnées) qui vérifient à la fois la première équation et la deuxième. La solution de ce système c'est donc ? C'est.... c'est ... c'est... ?
Le **point d'intersection des deux droites**, oui !

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un système linéaire.

Résolution de système par combinaison : Deux principes pour la résolution d'un systèmes à deux équations à deux inconnues :

1. On peut multiplier (ou diviser) tous les termes d'une équation par un même nombre,
2. On peut additionner les deux équations terme-à-terme.

Une fois ces deux principes effectuées, on aura ramener le problème à une seule équation à une inconnue que l'on sait tous résoudre maintenant.

Expliquons bien : nous savions déjà que nous pouvons multiplier tous les termes d'une équation par un même nombre. Jusque là, pas de problème. Ensuite, on additionne en fait les x de la première équation avec ceux de la seconde, pareil pour les y, etc., dans le but de supprimer une des deux inconnues.
On trouvera donc une seul équation avec une inconnue, que l'on résout.
Puis on prend une des deux équations de départ (la plus "jolie") et on remplace l'inconnue trouver pour transformer cette équation en une équation à une seule inconnue, que l'on sait résoudre. Et voilà.
Regardez bien l'exemple qui suit. Il résume tout ce que je viens de dire.

Exemple : Quelle est le point d'intersection des droites d'équations $y = x + 2$ et $y = 3x - 1$?

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+2 \\ y & = & 3x-1 \end{array}\right.$$

On va avant tout numéroter les lignes du système comme ceci :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+2(L1) \\ y & = & 3x-1(L2) \end{array}\right.$$

On choisit ensuite quelle inconnue nous voulons supprimer. C'est comme on veut. Allons pour la suppression de y, c'est le plus simple ici.
on fait une soustraction terme-à-terme : $y-y=0$, $x-3x=-2x$ (normal, c'est ce qu'on voulait) et enfin $2-(-1)=2+1=3$.
On obtient donc l'équation suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+2(L1) \\ -2x+3 & = & 0(L2) \end{array}\right.$$

Que l'on résout pour trouver que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+2(L1) \\ x & = & \frac{3}{2}(L2) \end{array}\right.$$

On a trouvé x, cherchons y.
On va tout simplement remplacer la valeur trouvée de x dans une des équation de notre choix. Remplaçons x par $\frac{3}{2}$ dans $(L1)$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{3}{2}+2(L1) \\ x & = & \frac{3}{2}(L2) \end{array}\right.$$

La solution de cette équation est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{7}{2}(L1) \\ x & = & \frac{3}{2}(L2) \end{array}\right.$$

On a donc trouvé la solution du système :

$$(\frac{3}{2};\frac{7}{2})$$

Conclusion : le point d'intersection des droites $y = x + 2$ et $y = 3x - 1$ est le point de coordonnées $(\frac{3}{2};\frac{7}{2})$. L'exercice est alors terminé.

La seconde méthode est la méthode par **substitution**. Elle consiste à exprimer une inconnue en fonction de la seconde et de remplacer tout ça dans une des deux équations. Dans l'exemple précédent, on aurait fait ainsi :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & x+2 \\ y & = & 3x-1 \end{array}\right.$$

On a deux expressions de y, donc on peut égaliser les deux équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-1 & = & x+2 \\ y & = & 3x-1 \end{array}\right.$$

On continu en résolvant la première équation, puis la deuxième.

2 - Nombres de solutions d'un système linéaire

Un système peut avoir zéro, une ou plusieurs solutions.

Dans le cas où le système n'a pas de solution : les deux droites sont parallèles.
Dans le cas où le système a une unique solution, les deux droites de coupent en un point dont les coordonnées sont le couple de solution de ce système.
Si le système a plusieurs solutions, alors les deux droites sont confondues.

Peut-on savoir à l'avance combien de solutions a le système ?
Oui. C'est ce que vous ferez si on vous demande par exemple la nature deux deux droites, si elles sont parallèle sou non. Voici comment on fait.

Propriétés : Soit un système suivant de deux équations à deux inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$$

On calcule les quatités $ab' - a'b$ et $bc' - b'c$ et :

- Si $ab' - a'b = 0$ et $bc' - b'c \neq 0$, alors le système admet aucune solution,
- Si $ab' - a'b \neq 0$, alors le système admet une unique solution,
- Si $ab' - a'b = 0$ et $bc' - b'c = 0$, alors le système dament une infinité de solutions.

Exemple : Combien de solution admet le système suivant ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y & = & 3 \\ 3x+y & = & 1 \end{array}\right.$$

Calculons :

$$2 \times 1 - 3 \times (-2) = 8 \neq 0$$

Donc, le système admet une unique solution.

Autre exemple : Les droites d'équations $y = 3x + 2$ et $y = -x - 2$ sont-elles parallèles ?

On forme le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3x+2 \\ y & = & -x-2 \end{array}\right.$$

Que l'on transforme pour avoir la bonne forme.

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3x+y & = & 2 \\ x+y & = & -2 \end{array}\right.$$

Puis on utilise la propriété précédente en calculant :

$$(-3)\times 1 - 1\times 1 = -4 \neq 0$$

Le système admet une unique solution.
Donc, les droites ne sont pas parallèles.

3 - Changement de variable

Cette partie du cours est surement la plus compliquée. C'est elle qui va clôturée ce chapitre, alors un dernier petit effort et vous pourrez aller tranquillement vous reposer après.

Soit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{x+2}+\frac{1}{y} & = & 1 \\ 2\sqrt{x+2}-\frac{2}{y} & = & 6 \end{array}\right.$$

Comment on va résoudre tout ça. En faisant ce qu'on appelle un **changement de variables**.

On va donc poser deux nouvelles variables, X et Y, qui seront fonction des anciennes, x et y.
Posons donc : $X = \sqrt{x+2}$ et $Y = \frac{1}{y}$.
On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X+Y & = & 1 \\ 2X-2Y & = & 6 \end{array}\right.$$

Nous savons à présent résoudre ce système.
Je vous laisse le faire, ça sera un bon exercice pour vous.
Voici la solution :

$$(2;-1)$$

Mais **attention**, c'est $X = 2$ et $Y = -1$.
Comment retrouver x et y ?
En faisant le chemin inverse. On va résoudre les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{x+2} & = & 2 \\ \frac{1}{y} & = & -1 \end{array}\right.$$

On trouve : $x = 2$ et $y = -1$.
Conclusion : la solution du système de départ est le couple $(2;-1)$.

Voilà, fini pour ce chapitre. Vous pouvez disposer.