Fonctions et variations

Voilà une nouvelle notions sur les fonction : les variations.
Une fonction sera soit **croissante**, soit **décroissante**, soit **constante**.
Ce chapitre se veut introductif et sera bien plus étudié l'année prochaine, quelque soit la section que vous choisirez.

www.mathsbook.fr

I - Variations d'une fonction

La définition de **sens de variation** d'une fonction est à maîtriser absolument. Comprenez bien chaque mot de la définition qui suit.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D et I un intervalle de D.

– f est **croissante** sur I si et seulement si pour tout x_1, $x_2 \in I$, tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,

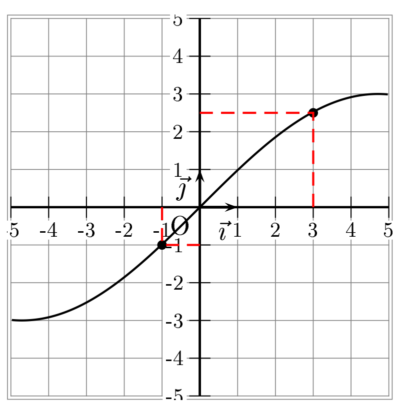
– f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tout x_1, $x_2 \in I$, tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

– f est **constante** sur I si et seulement si il existe un $k \in \mathbb{R}$ (un réel k) tel que pour tout réel x de I on $f(x) = k$.

Je n'ai absolument rien compris ! Pouvez-vous m'aider s'il-vous-plaît ?
Tout de suite. Je vais tout vous interpréter.

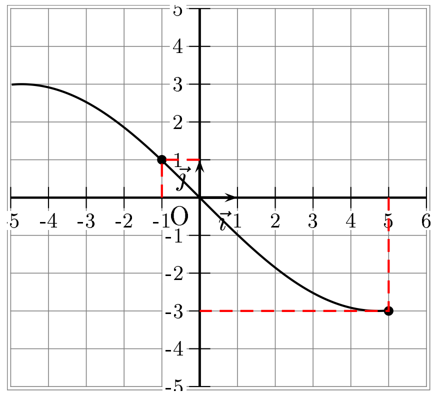
Interprétation :

– Pour une fonction croissante, plus on avance dans les x croissants, plus on avancera dans les $f(x)$ croissants. Pour un premier x_1, on aura l'image $f(x_1)$, et pour un x_2 plus grand que x_1, on aura un $f(x_2)$ plus grand que le $f(x_1)$. Donc la fonction monte au fur et à mesure qu'on avance dans les x, elle **croît**.



On voit bien que pour $x_1 = -1 \leqslant x_2 = 3$, on a $f(x_1) = -1 \leqslant f(x_2) = 2,5$.

– Pour une fonction décroissante, plus on avance dans les x croissants, plus on avancera dans les $f(x)$ décroissants. Pour un premier x_1, on aura l'image $f(x_1)$, et pour un x_2 plus grand que x_1, on aura un $f(x_2)$ plus petit que le $f(x_1)$. Donc la fonction descend au fur et à mesure qu'on avance dans les x, elle **décroît**.



On voit bien que pour $x_1 = -1 \leqslant x_2 = 5$, on a $f(x_1) = 1 \geqslant f(x_2) = -3$.

Et comment on montre qu'une fonction est croissante ou décroissante ?
Il y a une méthode bien sur. Par contre, j'ai besoin de toute votre attention car il faut s'accrocher.
On prend deux éléments d'un intervalle I du domaine de définition D pour une fonction f, prenons donc a et b, tels que $a < b$. On doit reconstruire la fonction f pour prouver que $f(a) \leqslant f(b)$ ou que $f(a) \geqslant f(b)$.
Regardez bien l'exemple qui suit. Ce n'est pas si compliqué que ça finallement.

Exemple : Soit la fonction $f(x) = x^2 + x + 3$.
On commence par prendre deux nombres positifs pour l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Soit a et b positifs tels que $a < b$.
On pourrait faire la même chose pour l'intervalle $\mathbb{R}_-$ en prenant deux nombres négatifs.
On a une inégalité, on part de là pour récupérer la fonction f à gauche et à droite de l'inégalité. C'est parti !
On sait donc que $a < b$. Par conséquent,

$$a^2 < b^2$$

On a récupérer le premier terme de la fonction.
On peut ajouter a à gauche et b à droite car encore une fois $a < b$:

$$a^2 + a < b^2 + b$$

Ajoutons 3 à l'inégalité entière :

$$a^2 + a + 3 < b^2 + b + 3$$

On a donc ici :

$$f(a) < f(b)$$

C'est la définition d'une fonction croissante. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

II - Maximum et minimum

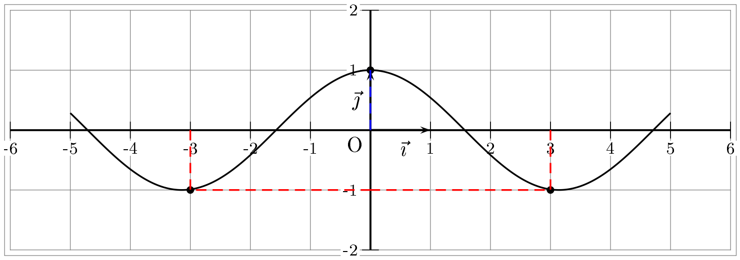
Soit une fonction croissante sur un intervalle D_1, puis décroissante sur un intervalle D_2, et encore croissante sur un intervalle D_3, etc. Elle passera par un maximum et un minimum (si elle ne pars pas à l'infini). C'est le sujet de cette deuxième section.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D et I un intervalle de D et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geqslant f(a)$,
- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leqslant f(a)$.

En fait, si toutes les valeurs de $f(x)$ sont supérieurs à la valeur $f(a)$, c'est que $f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction. $f(a)$ est le minimum de la fonction.
Et si toutes les valeurs de $f(x)$ sont inférieurs à la valeur $f(a)$, c'est que $f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction. $f(a)$ est le maximum de la fonction.

Exemple : Considérons la fonction cosinus $f(x) = \cos x$ sur $[-5; 5]$ représenté si-dessous.



En bleu, le maximum atteint en $x = 0$ et vaut $f(0) = 1$.
En rouge, le minimum atteint deux fois dans cette intervalle, en $x = -3$ et $x = 3$ qui vaut $f(-3) = f(3) = -1$.

Remarque : Les fonctions qui tendent vers l'infini ne possèdent pas de maximum (ou de minimum).
Si une fonction possède un maximum (ou un minimum), il est unique, mais il peut être atteint plusieurs fois, comme on l'a vu dans l'exemple précédent.

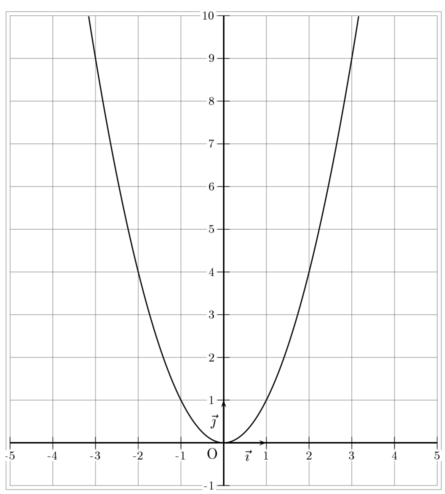
Et comment on montre qu'une fonction a un maximum ou un minimum ?
J'attendais la question. On s'appuis sur le fait que si la fonction change de sens de variation, alors elle possède un maximum (ou un minimum).
Vous faites donc comme suit (m est le minimum et M le maximum et a et b sont deux réels) :

1. On montre que la fonction est croissante sur un intervalle $[a; M]$ (ou décroissante sur $[a; m]$),
2. On montre que la fonction est décroissante sur un intervalle $[M; b]$ (ou croissante sur $[m; b]$).

Alors la fonction admet un maximum M (ou un minimum m).

Remarque : Il y a une deuxième méthode :
Si $f(M) - f(x) > 0$, alors M est le maximum de f.
Si $f(m) - f(x) < 0$, alors m est le minimum de f.

Exemple : La fonction carré $f(x) = x^2$ admet un minimum en 0 qui est 0.
En effet, la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; \infty[$. De plus, $f(0) = 0$.
Cela se voit clairement sur le graphe.



Remarque : On appelle **extrema** le maximum ET le minimum d'une fonction.

III - Etude du sens de variation

1 - Cas des fonctions affines

Le cas des fonctions affines est le plus simple. C'est le même d'ailleurs que celui des fonctions linéaires. On détermine leur sens de variation grâce au coefficient directeur.

Définition : Soit une fonction affine $f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$.

– Si $a > 0$, alors f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$,

– Si $a < 0$, alors f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$,

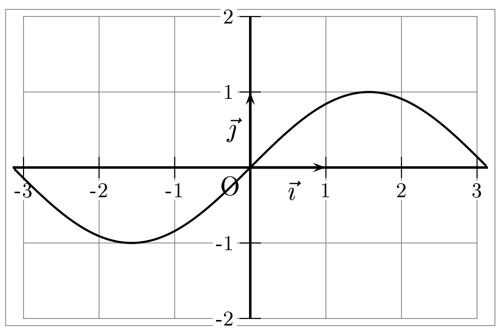
– Si $a = 0$, alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$.

Facile, non ?
En jetant seulement un petit coup d'oeil à la fonction, on peut déterminer son sens de variation.
Je n'est donc rien à ajouter.

2 - Cas général

Pour représenter le sens de variation d'une fonction, on trace son **tableau de variations**.
Dans ce tableau, on met une flèche $\nearrow$ pour dire que la fonction croît, et une flèche $\searrow$ pour dire que la fonction décroît.
Prenons un exemple.

Exemple : Traçons le tableau de variation de la fonction sinus $f(x) = \sin x$ sur $[-\pi; \pi]$.



On commence par faire un tableau de variation "blanc".

x	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	

On voit bien que la fonction change de sens de variation pour $x = -\frac{\pi}{2}$, puis pour $x = \frac{\pi}{2}$.

x	$-Pi$	$-(Pi/2)$	$Pi/2$	Pi
$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

On voit bien que la fonction est décroissante de $x = -\pi$ à $x = -\frac{\pi}{2}$, croissante de $x = -\frac{\pi}{2}$ à $x = \frac{\pi}{2}$ et enfin décroissante de $x = \frac{\pi}{2}$ à $x = \pi$.

x	$-Pi$		$-(Pi/2)$		$Pi/2$		Pi
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

On remplis la deuxième colonne de la deuxième ligne avec les extrema $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, ainsi qu'avec les valeurs de $f(-\pi) = 0$ et $f(\pi) = 0$.

x	$-Pi$		$-(Pi/2)$		$Pi/2$		Pi
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Remarque : Quand on a une valeur interdite à inscrire dans un tableau de variations, on l'écrit dans la ligne des x, et on mets une double barre "||" dans la ligne des $f(x)$ comme ceci-ci :

x	-1		0		1		2
$f(x)$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	-6

Ici, la valeur interdite est $x = 1$.

Remarque : A partir d'aujourd'hui, quand on vous demandera l'étude d'une fonction, vous devrez donner :

1. Son domaine de définition,
2. Son tableau de variation,
3. Son tableau de valeurs,
4. Sa courbe représentative.

Eh oui, vous êtes au lycée à présent. Ca ne rigole plus !