Généralités sur les fonctions

Nous avions étudié les fonctions linéaires ainsi que les fonctions affines en classe de 3ème. Nous voilà à présent dans un nouveau chapitre sur les fonctions. Cette fois-ci, nous allons étudier les fonctions plus en général.

www.mathsbook.fr

I - Notion de fonction

La notion de fonction doit déjà être acquise à votre niveau. On la complète légèrement dans ce qui suit.

Définition : Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f de D sur $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un réel unique noté $f(x)$.

Exemple : La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, qu'on appelle **fonction inverse**, associe à chaque réel son inverse, et est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0), car l'inverse de 0 n'existe pas.

II - Ensemble de définition

Dans la section précédente, nous avons défini un ensemble D sur lequel été défini la fonction f. C'est **l'ensemble de définition**.

Définition : Soit f une fonction.
On appelle **ensemble de définition** (ou domaine de définition) l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction f existe.

Vous avez compris. C'est un ensemble, un intervalle, sur lequel la fonction f est défini, sur laquelle elle existe.

Exemples :
La fonction inverse n'est pas défini en 0. Son ensemble de définition sera :

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

La fonction $f(x) = \sqrt{1-x}$ existe si et seulement si $1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$. L'ensemble de définition de cette fonction est donc :

$$D =]-\infty; 1]$$

Le symbole ∞ signifie "l'infini". Par convention, le crochet sera toujours ouvert à la borne infinie.
Cependant, La fonction existe pour $x = 1$, donc on inclus le nombre 1 dans l'intervalle en fermant le crochet dans la borne 1.

Remarque : On peut éventuellement restreindre une fonction sur un intervalle donné.

III - Image et antécédent

Vous vous rappelez ?

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle D.
On appelle **image** de x par f le nombre $f(x)$.
On appelle **antécédent** de y le nombre x telle que $f(x) = y$.

Remarque très importante : Chaque réel de l'ensemble de définition d'une fonction a un antécédent unique. Tandis que chaque image peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

J'explique cette remarque. En fait, une fonction ne peut pas "revenir sur elle-même". Elle ne passera donc qu'une seule fois par $x = 1$, $x = 2$, etc. Cependant, la valeur $y = 3$, par exemple, peut être prise plusieurs fois par une fonction, si cette fonction croît puis décroît, etc.

Exemple : Soit la fonction suivante :

$$f(x) = x^2 - 3 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Calcul de l'image de 1 : $f(1) = 1^2 - 3 = -2$.
Calcul de l'image de -3 : $f(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$.
Calcul de l'antécédent de 2 : $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$. Ici, 2 a deux antécédents.

IV - Tableau de valeurs

On va maintenant vouloir tracé la représentation graphique d'une fonction. Pour cela, on va avoir besoin de plusieurs valeurs prises par cette fonction en fonction de x. On va tracer un **tableau de valeurs**.

Définition : Le **tableau de valeurs** d'une fonction f regroupe les coordonnées d'un certain nombre de points de la courbe à intervalles réguliers.
On appelle **pas** l'écart régulier entre deux valeurs successives de x.

Exemple : Soit la fonction suivantes :

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ sur $D = [-3; 2]$ Ici, on défini un intervalle sur lequel on veut étudier la fonction f. Cette fonction aurait été défini sur $\mathbb{R}$ sinon.
Voici le tableau de valeurs de f, avec un pas de 1 :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	20	7	0	-1	4	15

On a rempli ce tableau en cherchant l'image de -3 ; de -2 ; de -1 ; etc. comme on l'avait fait précédemment :
$f(-3) = 3 \times (-3)^2 + 2 \times (-3) - 1 = 3 \times 9 - 6 - 1 = 27 - 6 - 1 = 20$

Mais pourquoi tant de haine ? A quoi va nous servir tous ces calculs de valeurs ?
J'y viens dans la section suivante.

V - Représentation graphique

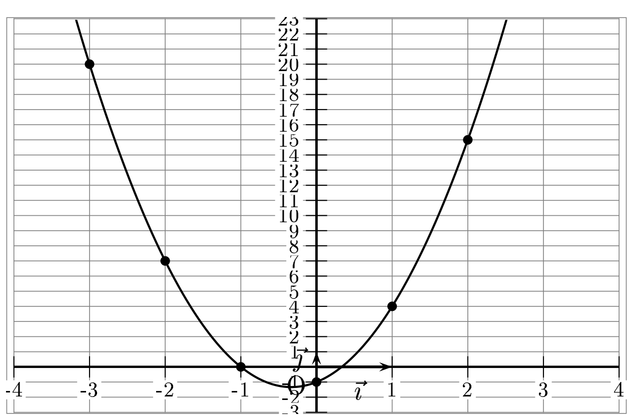
Un tableau de valeur, oui, mais pourquoi ? Bien, pour pouvoir tracer la représentation graphique d'une fonction.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle D.
La représentation graphique (ou la courbe représentative) de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x appartient à D ($x \in D$).

Exemple : Reprenons le tableau de valeurs pour pouvoir tracé la fonction donnée dans l'exemple de la section précédente, car il est nécessaire pour tracer la fonction.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	20	7	0	-1	4	15

Traçons à présent la fonction f.



Remarque : Quand on vous demandera d'étudier une fonction, vous devrez le faire de la façon suivante :

1. Donner son domaine de définition,
2. Tracer son tableau de valeurs,
3. Tracer la courbe représentative de la fonction.

L'exemple suivant résume la totalité du chapitre. Comprenez-le bien.

Exemple : Etude de la fonction :

$$f(x) = \frac{x+4}{x-1}$$

1. Domaine de définition : on ne doit pas avoir un dénominateur nul, donc :

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

   On dira que 1 est la valeur interdite. On en déduit le domaine de définition :

$$D = \mathbb{R} - \{1\}$$

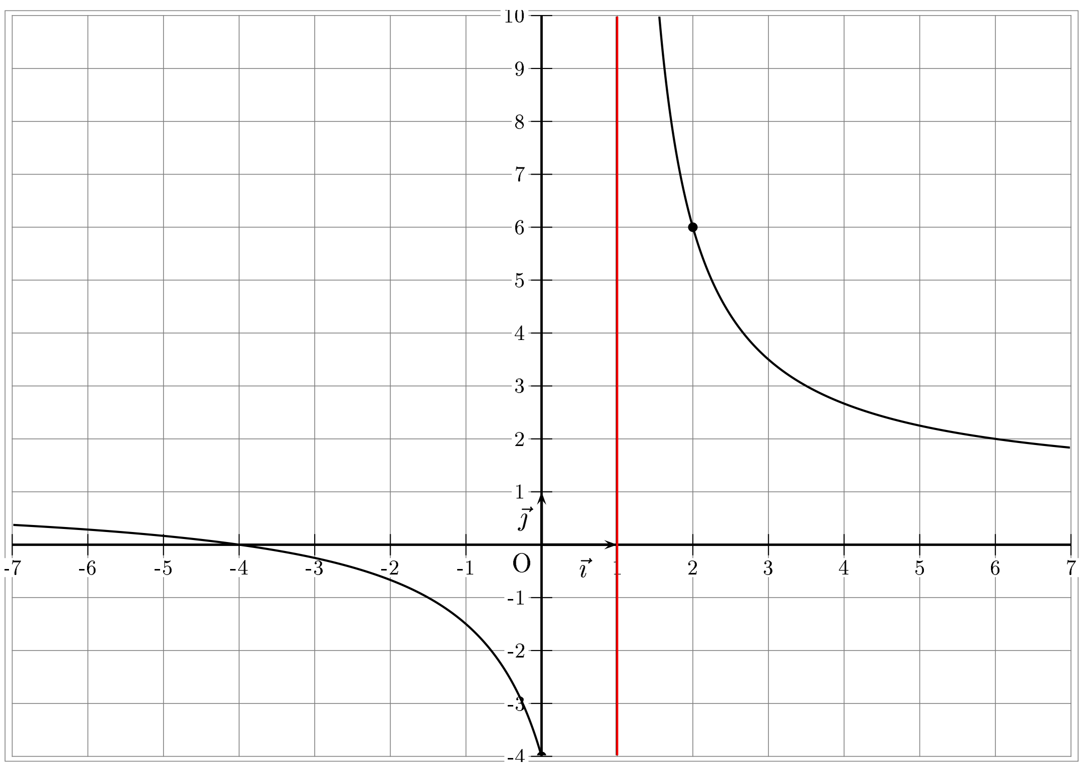
   On aura donc une **asymptote verticale** pour $x = 1$. C'est une droite verticale d'équation $x = 1$. La courbe ne la touchera jamais.

2. Traçons le tableau de valeurs de la fonction f.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{-3}$	$\frac{3}{-2}$	-4	$\varnothing$	6	$\frac{7}{2}$

   Le symbole $\varnothing$ signifie "impossible".

3. Venons-en à tracer la courbe représentative de la fonction f.



   La droite vertical rouge est l'asymptote $x = 1$ qui représente la valeur interdite 1.
   Vous pouvez remarquez que la courbe tend vers cette droite verticale sans JAMAIS la toucher.