Géométrie plane

Ce chapitre sur la géométrie plane va récapituler toutes les notions de géométrie que vous avez apprises au collège jusqu'en classe de seconde.
Nous passerons entre autre par les symétries, axiale et centrale, par toutes les définitions et propriétés des différents parallélogrammes abordées en 5ème, carrée, rectangle, losange. Mais ce n'est pas tout. Nous parlerons également des triangles et des droites remarquables comme les hauteurs ou les médianes. Nous verrons aussi les théorèmes sur le triangle rectangle. Enfin, nous terminerons ce chapitre de géométrie plane avec les formules d'aires des figures usuelles telles que les parallélogramme, les triangle ou encore le disque.

Ce cours doit (normalement) être un cours de révision. Rien de bien difficile donc. C'est la raison pour laquelle je passerai en revue toutes les définitions et propriétés sans trop entrer dans le détail. Si vous en voulez plus, revenez aux chapitres des classes précédentes.

www.mathsbook.fr

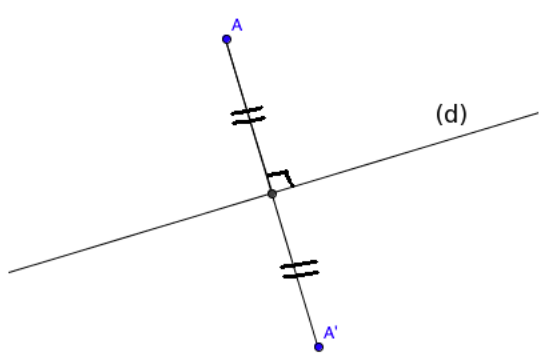
I - Symétries

1 - Symétrie axiale

Quand on vous parlera de **symétrie axiale**, aillez toujours en tête l'image de la tâche d'encre sur la feuille blanche. Ca vous aidera beaucoup, croyez-moi.

Définition : Deux figures géométriques sont symétriques par rapport à une droite (d) si, en pliant la feuille suivant la droite (d), les deux figures se superposent.
Cette droite (d) est appelée **axe de symétrie**.

Pour construire le symétrique A' d'un point A par rapport à une droite (d), on trace la droite passant par ce point A et perpendiculaire à l'axe de symétrie (d). On choisit A' sur cette droite construite tel que les distances entre A et (d) et A' et (d) soient égales.

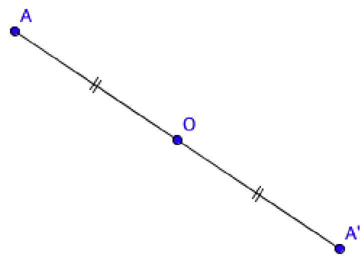


Le point A' est appelé **image** du point A par la symétrie axiale d'axe (d).

2 - Symétrie centrale

Vous rappelez-vous aussi de la **symétrie centrale** ? C'est par rapport à un... Point !.

Définition : La **symétrie centrale** est une symétrie par rapport à un point.
Pour construire le symétrique A' d'un point A par rapport à un point O, appelé **centre de symétrie**, on trace la droite passant par ce point A et passant par le point O, on choisit A' sur cette droite construite tel que les distances AO et $A'O$ soient égales.



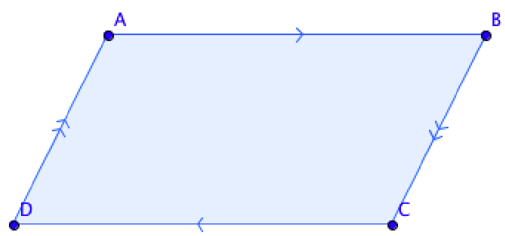
Le point A' est appelé **image** du point A par la symétrie centrale de centre O.

II - Parallélogrammes

1 - Définition et propriétés d'un parallélogramme

Commençons par rappeler la définition d'un parallélogramme.

Définition : Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

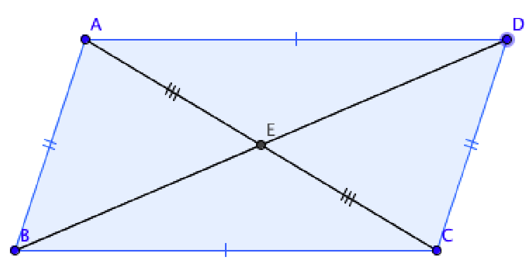


A partir du moment où un quadrilatère a ses quatre côtés parallèles, deux à deux, c'est un parallélogramme.

On attaque les propriétés maintenant.

Propriétés : Un parallélogramme possède les propriétés suivantes :
- Ses côtés sont égaux deux à deux,
- Ses côtés sont parallèles deux à deux,
- Ses angles opposés sont égaux deux à deux,
- Ses diagonales se coupent en leur milieu.

On le voit très bien sur la figure ci dessous.



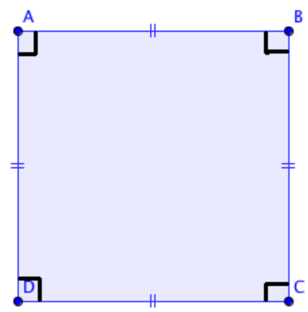
Si vous êtes devant une figure qui possède une de ses quatre propriétés précédentes, alors vous pourrez affirmez que c'est un parallélogramme.

2 - Carré

Voyons à présent les figures géométriques qui sont des parallélogramme et commençons par le carré.

Définition : Un carré est un parallélogramme.

Un carré possède quatre angles droits, quatre côtés sont égaux et parallèles deux à deux.
Ses diagonales ont la même longueur et se coupent en leur milieu.



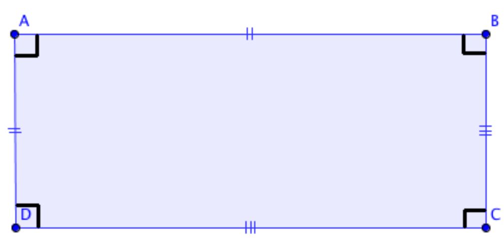
Si vous rencontrer un quadrilatère qui a ses diagonales de même longueur, alors c'est un carré.

3 - Rectangle

Le rectangle également.

Définition : Un rectangle est un parallélogramme.

Un rectangle possède quatre angles droits, ses côtés sont parallèles et égaux deux à deux.
Ses diagonales se coupent en leur milieu.



Si vous rencontrez un quadrilatère qui possède trois angles droits, alors c'est un rectangle.

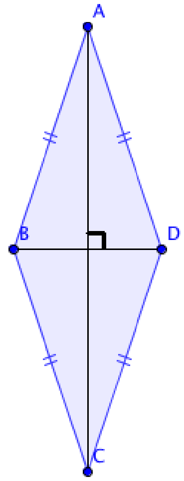
Si vous avez un parallélogramme, c'est un rectangle s'il possède un angle droit, ou si ses diagonales ont la même longueur.

4 - Losange

Enfin, le losange aussi est un parallélogramme.

Définition : Un losange est un parallélogramme.

Un losange possède quatre côtés égaux et parallèles deux à deux.
Ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.



Si vous rencontrez un quadrilatère qui possède quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.

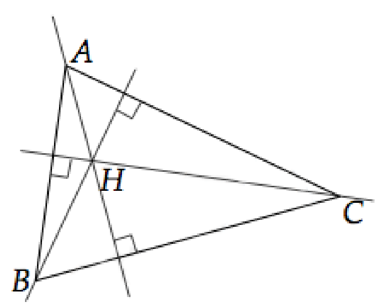
Si vous avez un parallélogramme, c'est un losange s'il possède deux côtés consécutifs de même longueur, ou si ses diagonales sont perpendiculaires.

III - Triangle et droites remarquables

1 - Hauteur

On va commencer par les **hauteurs d'un triangle**.

Hauteur : La hauteur issue d'un sommet d'un triangle est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.



Donc, vous prenez un côté d'un triangle, vous tracer une droite perpendiculaire à ce côté et passant par le sommet opposé. Cette droite est une des hauteurs du triangle. J'ai bien dis une des hauteurs du triangle car un triangle a trois côtés, donc trois hauteurs.

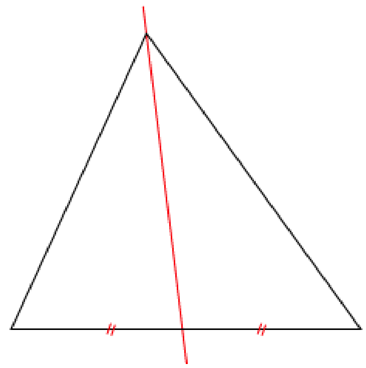
Remarque : Une hauteur peut être située à l'extérieur du triangle.

Remarque importante : Les trois hauteurs du triangle se coupent en un même point appelé **l'orthocentre du triangle**.

2 - Médiane

Maintenant les **médianes d'un triangle**.

Médiane : La médiane issue d ?un sommet d ?un triangle est la droite passant par ce sommet et par le milieu du côté opposé.



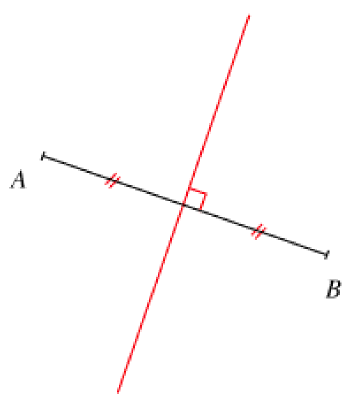
Prenez un côté d'un triangle, vous tracer une droite qui passe par le milieu de ce côté et passant par le sommet opposé. Cette droite est une des médianes du triangle. J'ai bien dis une des médianes du triangle car un triangle a trois côtés, donc trois médianes.

Remarque importante : Les trois médianes du triangle se coupent en un même point appelé **le centre de gravité du triangle**.

3 - Médiatrice

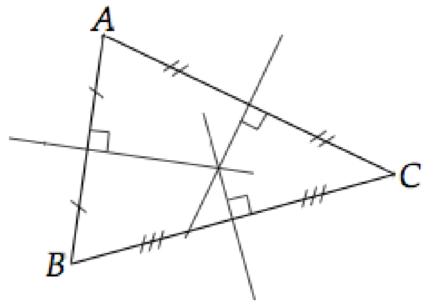
On parlera de la **médiatrice d'un segment**.

Médiatrice : La médiatrice d'un segment est la droite qui passe perpendiculairement en son milieu.

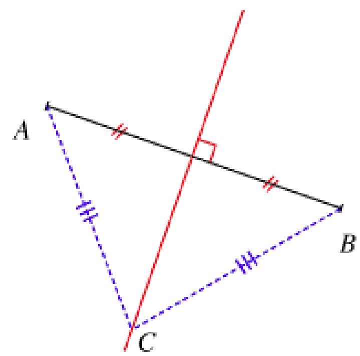


Donc, vous prenez un segment, vous tracer une droite qui passe par son milieu et qui y forme un angle droit. Cette droite est la médiatrice de ce segment.

Remarque : Les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices de chacun des côtés.



Propriété des médiatrice : Si un point est sur la médiatrice d'un segment, il est à égale distance des extrémités de ce segment.
Inversement, si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, il appartient à la médiatrice de ce segment.

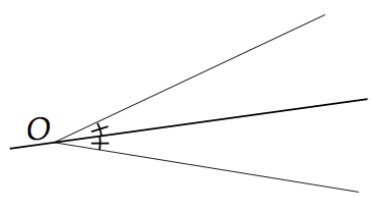


Remarque : Les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point, le **centre du cercle circonscrit** au triangle. Une partie est consacré à ce point dans la fin de ce cours. Patience.

4 - Bissectrice

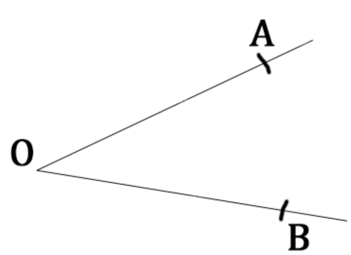
Vous rappelez-vous de ce qu'est la **bissectrice d'un angle** ?

Bissectrice d'un angle : La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui sépare l'angle en deux angles de même mesure.



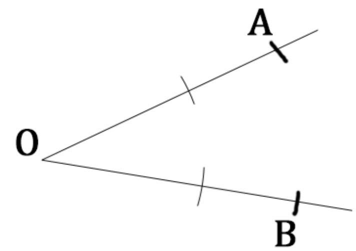
Et comment on construit la bissectrice d'un angle ?

Prenons l'angle suivant.

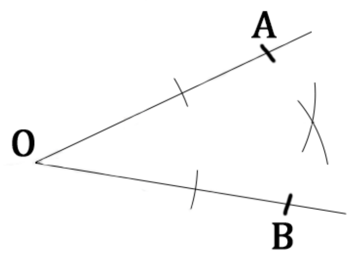


Nous allons tracer la bissectrice de cet angle $\widehat{AOB}$.
Commençons d'abord par tracer sur chacune de ces demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ deux arcs de cercle centrés en O et de

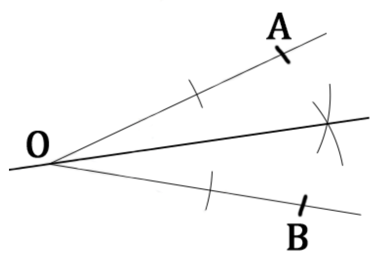
même rayon. En fait, vous pointez le compas sur O et vous l'ouvrez autant que vous voulez et faites deux arcs de cercle sur chacune des demi-droites.



A partir de ces deux points, on trace à nouveau deux arcs de cercles de même rayon qui se coupent. Donc on pointe le compas sur le premier arc de cercle, on ouvre le compas comme on veut et on trace un arc de cercle. Pareil avec le second.

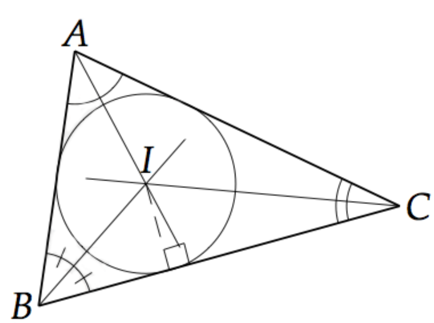


La bissectrice est obtenue en traçant la droite qui passe par ce dernier point et par le sommet O de l'angle.



Je peux donc maintenant vous donner la définition du cercle inscrit à un triangle. Evidemment, vous l'aurez compris, il y a un lien avec les bissectrices. Mais lequel ?

Cercle inscrit : Dans un triangle, les bissectrices des trois angles se coupent en un même point, qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle. Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle.



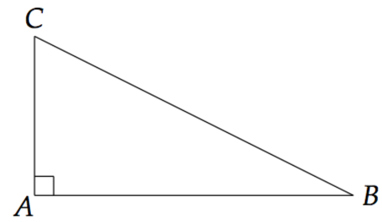
Le cercle circonscrit à un triangle c'est le cercle à l'extérieur du triangle, et le cercle inscrit à un triangle, c'est celui qui est à l'intérieur. Et comme il est à l'intérieur, son centre est forcément lui aussi, à l'intérieur du triangle.

IV - Triangle rectangle et cercle

1 - Théorème de Pythagore et réciproque

Le **théorème de Pythagore** va vous servir à calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir des longueurs des deux autres. Vous rappelez-vous de ça au moins ?

Théorème de Pythagore : Soit un triangle ABC, rectangle en A.

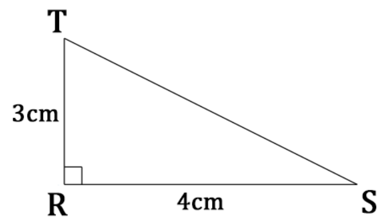


D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Attention : Il faut **absolument** avoir un triangle rectangle.

Exemple : Soit le triangle RST rectangle en R suivant :



Dans ce triangle, on a $RS = 4cm$ et $RT = 3cm$.
Calculer TS.

On a ici un triangle rectangle. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.
Donc, dans le triangle RST, rectangle en R, d'après le théorème de Pythagore :

$$TS^2 = RS^2 + RT^2$$

Or, $RS = 4cm$ et $RT = 3cm$.
Donc, on peut faire l'application numérique :

$$TS^2 = RS^2 + RT^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

Oui mais là on obtient la longueur du côté au carré. Comment reviens à la longueur du côté ?

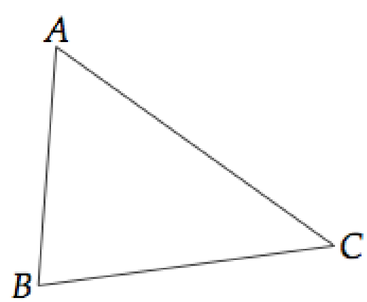
On fait un coup de **racine carrée** :

$$TS = \sqrt{25} = 5cm$$

Et pour montrer qu'un triangle est rectangle, on utilise la **réciproque du théorème de Pythagore**.

Réciproque du théorème de Pythagore : Dans un triangle, si la longueur d'un côté au carré est égal à la somme des longueurs des deux autres côtés au carré alors ce triangle est un triangle rectangle et ce côté est l'hypoténuse.

Exemple : Soit le triangle suivant avec $AB = 4cm$, $AC = 6,8cm$ et $BC = 5,5cm$:



J'ai volontairement dessiné un triangle qui ne ressemble pas du tout à un triangle rectangle.

Calculons donc le carré du plus grand côté de ce triangle, soit le carré de $[AC]$:

$$AC^2 = 6,8^2 = 46,25$$

Calculons maintenant la somme des carrés des deux autres côtés du triangle :

$$AB^2 + BC^2 = 4^2 + 5,5^2 = 16 + 30,25 = 36,25$$

On remarque que :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Donc, le triangle ABC est un triangle rectangle, d'hypoténuse AC et donc rectangle en B.

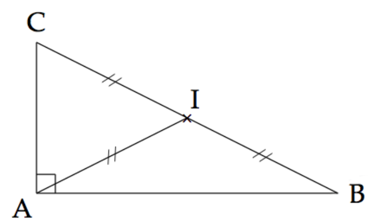
2 - Cercle circonscrit au triangle rectangle

Plusieurs propriétés importantes dans cette partie sur le **cercle circonscrit au triangle rectangle**.
Déjà, rappelons-nous qu'un cercle circonscrit à un triangle, c'est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

Je commence par le **théorème de la médiane**.

Théorème de la médiane : Dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.

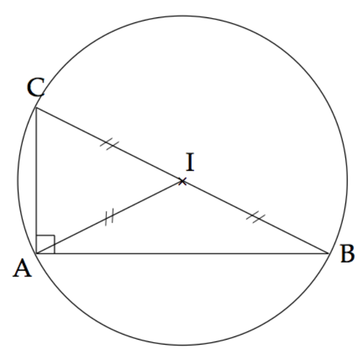
Réciproquement, si la médiane issue d'un sommet d'un triangle mesure la moitié du côté opposé, alors ce triangle est un triangle rectangle.



Pas besoin d'exemple sur ce théorème, il est très clair. Passons à la conséquence directe.

Cercle circonscrit au triangle rectangle : Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse et donc pour diamètre l'hypoténuse.

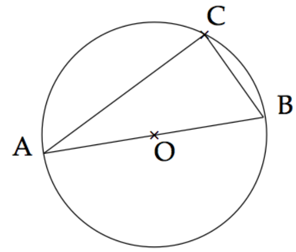
Réciproquement, si l'un des côtés d'un triangle est le diamètre d'un cercle et que son troisième sommet est sur ce même cercle, alors le triangle est rectangle.



Cette propriété ce comprend facilement car, dans la figure précédente, les segment $[IA]$, $[IB]$ et $[IC]$ sont en fait des rayons du cercle circonscrit au triangle ABC.

C'est une propriété très intéressante. En effet, prenez un cercle. Alors son diamètre forme un triangle rectangle avec n'importe quel point de ce cercle.

Exemple : Soit un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. Soit un point C sur ce cercle.

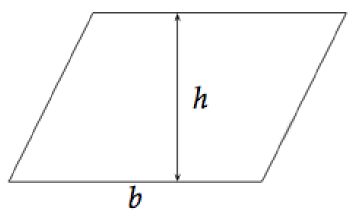


Le triangle ABC est rectangle en C et son hypoténuse est le diamètre $[AB]$ du cercle.
Et donc, la médiane issue de C vaut la moitié du segment $[AB]$ car les segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons du cercle circonscrit.

V - Aires des figures usuelles

1 - Aire d'un parallélogramme

Aire d'un parallélogramme : Soit un parallélogramme de base b et de hauteur h.
Sachez bien que la hauteur est perpendiculaire aux deux bases.

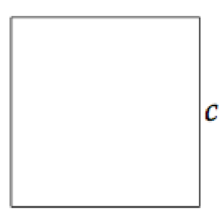


L'aire de ce parallélogramme est défini par :

$$\mathcal{A} = b \times h$$

2 - Aire d'un carré

Aire d'un carré : Soit un carré de côté c.

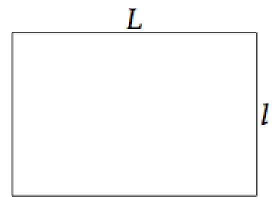


L'aire de ce carré est défini par :

$$\mathcal{A} = c \times c = c^2$$

3 - Aire d'un rectangle

Aire d'un rectangle : Soit un rectangle de largeur l (petit côté) et de longueur L (grand côté).

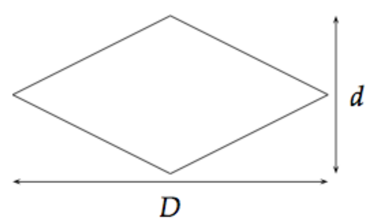


L'aire de ce rectangle est défini par :

$$\mathcal{A} = l \times L$$

4 - Aire d'un losange

Aire d'un losange : Soit un losange dont la grande diagonale fait une longueur D et la petite fait une longueur d.

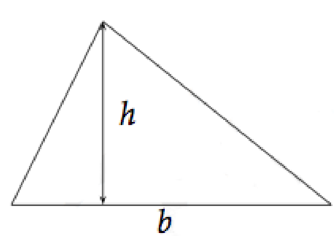


L'aire de ce losange est défini par :

$$\mathcal{A} = \frac{D \times d}{2}$$

5 - Aire d'un triangle

Aire d'un triangle : Soit un triangle de base b et de hauteur correspondante h.
Faites bien attention, on prend la hauteur perpendiculaire à la base que l'on utilise.

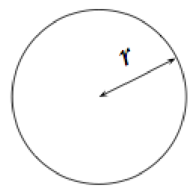


L'aire de ce triangle est défini par :

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

6 - Aire d'un disque

Aire d'un disque : Soit un disque de rayon r.

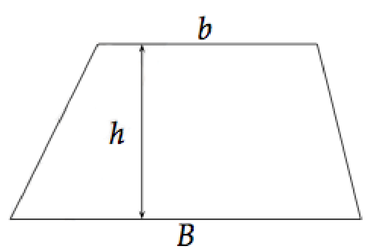


L'aire de ce disque est défini par :

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi \times r^2$$

7 - Aire d'un trapèze

Aire d'un trapèze : Soit un trapèze de grande base B, de petite base b et de hauteur h.



L'aire de ce trapèze est défini par :

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b) \times h}{2}$$