Les vecteurs

Nous avions déjà étudier les vecteurs l'année dernière. Cette année, nous n'allons plus beaucoup travailler à la construction, mais au calcul concernant les vecteurs. Donc, ranger votre crayons, sortez votre stylo et tenez-vous prés.

www.mathsbook.fr

I - Repérage dans le plan

Quelques petits rappels pour commencer.

Définitions : On utilise un **repère** pour repérer un point dans le plan.
Un repère est défini par trois points non alignés, généralement O, I et J :
- O est **l'origine** du repère,
- La droite (OI) est **l'axe des abscisses**,
- La droite (OJ) est **l'axe des ordonnées**,
- La longueur OI définit **l'unité** sur l'axe des abscisses,
- La longueur OJ définit **l'unité** sur l'axe des ordonnées,

Il existe plusieurs types de repères. Un repère peut avoir ses axes perpendiculaires ou non, de même longueur ou non.

Définitions : Plusieurs repères à connaître.
- Lorsque les axes d'un repère sont perpendiculaires, le repère est **orthogonal**.

- Lorsque les axes d'un repère sont perpendiculaires et les unités identiques, le repère est **orthonormal** ou **orthonormé**.

II - Coordonnées d'un vecteur

On fixe un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

Définition : Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$, que l'on note $\overrightarrow{u}(x; y)$, si :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

Exemple : Le vecteur $\overrightarrow{u}(5; -6)$ a pour abscisse 5 et pour ordonnée -6. Il fait trois pas vers la droite et six pas vers le bas.

Vous comprendrez parfaitement que, pour que deux vecteurs soient égaux, il faut nécessairement qu'il aient la même abscisse et la même ordonnée.

III - Longueur d'un vecteur

Un vecteur est défini, rappelez-vous, par un sens, une direction et une longueur. Je vais vous définir maintenant la longueur d'un vecteur.

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Dans un repère orthonormal, la longueur AB est égale à :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple : Soit les points du plan $A(-3; 1)$ et $B(2; 0)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB} = (2 + 3; 0 - 1) = (5; -1)$.
Calculons sa longueur :

$$AB = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

IV - Opérations sur les vecteurs

Un vecteur peut, bien évidemment, être additionner à un autre et multiplier par une constante.

Propriété : Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.

– Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$.

– Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky)$.

Regardez bien l'exemple qui suit. Il est fondamental que vous sachiez le reproduire le soyeux fermés.

Exemple : Soient les points $A(5;3)$ et $B(4;-1)$ du plan.
Déterminer les coordonnées du point C tel que : $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.

On commence par définir les coordonnées du points C : soient $(x;y)$ les coordonnées du point C.
On cherche en fait x et y, deux inconnues.
On part de l'équation de l'énoncé : $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.
Calculons $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AC}=(x-5;y-3)$ et $\overrightarrow{AB}=(4-5;-1-3)=(-1;-4)$.
En utilisant l'équation :

$$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}\iff(x-5;y-3)=3(-1;-4)$$

Ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} x-5 &= -3 \\ y-3 &= -12 \end{cases}$$

Que l'on résout aisément.

$$\begin{cases} x &= 2 \\ y &= -9 \end{cases}$$

Donc, les coordonnées du point C sont : $(2;-9)$.

V - Colinéarité

1 - Définition et propriété

C'est la nouveauté de cette année, celle qui va nous permettre de démontrer l'alignement et le parallélisme.

Définition : Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaire si et seulement si il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$$

Deux vecteurs sont colinéaire s'ils ont la même direction, le même sens, et s'ils sont proportionnels.

Et comment on montre que deux vecteurs sont colinéaires ?
J'allais y venir.

Propriété : Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si :

$$xy'-yx'=0$$

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{u}(1;2)$ et $\overrightarrow{v}(2;4)$ sont colinéaires.

En effet, on remarque que : $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{v}$.
Cela se vérifie bien aussi comme ceci :

$$1\times4-2\times2=4-4=0$$

C'est toujours pareil. Si la différence $xy' - yx'$ est nulle, les vecteurs sont colinéaires.

2 - Parallélisme et alignement

Comme je vous l'ai dit, la colinéarité va nous servir à démontrer le parallélisme, ainsi que l'alignement de points.

Propriétés : Deux propriétés, une sur l'alignement, une sur le parallélisme.

– Soient A, B et C trois points distincts du plan.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

– Soient deux droites distinctes (AB) et (CD) du plan.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

La colinéarité de deux vecteurs signifie en fait que les vecteurs sont parallèles. Si les vecteurs sont colinéaires, alors les droites dont les vecteurs sont directeurs (les droites que dirigent chacun de deux vecteurs) sont parallèles.

Pour démontrer l'alignement ou le parallélisme, il vous suffira de montrer la coliéarité. C'est tout.

Exemple : Soient les points $A(5;3)$, $B(6;2)$ et $C(-2;0)$.
Les points A, B et C sont-ils alignés.

Calculons les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et voyons s'ils sont colinéaires. S'ils le sont, les points sont alignés car on a deux vecteurs colinéaires et un point en commun. Sinon, les points ne le sont pas.
$\overrightarrow{AB} = (6-5; 2-3) = (1; -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2-5; 0-3) = (-7; -3)$. Regardons maintenant la colinéarité.

$$1 \times (-3) - (-1) \times (-7) = -3 - 7 = -10 \neq 0$$

Donc, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Je ne vous donne pas d'exemple sur le parallélisme, c'est la même chose. Vous calculez les coordonnées des vecteurs qui dirigent les droites dont vous voulez savoir si elles sont parallèles ou non. Si ces deux vecteurs sont colinéaires, les droites sont parallèles, sinon tant pis.