Nombres et calculs

Ce chapitre est un grand chapitre qui rappelle toutes les notions de calculs et de nombres vu au collège. Quelques notions sont quand même à rajouter.
Après ça, vous devez être opérationnel sur n'importe quel calculs de nombres.

www.mathsbook.fr

I - Ensembles

Il existe plusieurs grands groupes de nombres. En 2nd, vous devez en connaître cinq.

Ensembles de nombres : On distingue cinq ensembles de nombres :

- **Les entiers naturels** : ce sont tous les nombres entiers positifs. On note cet ensemble $\mathbb{N}$.
- **Les entiers relatifs** : ce sont tous les nombres entiers positifs et négatifs. On le note : $\mathbb{Z}$.
- **Les décimaux** : ce sont tous les nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffre. Cet ensemble est noté $\mathbb{D}$.
- **Les rationnels** : ce sont tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ (a entier et b entier non nul). On le note $\mathbb{Q}$.
- **Les réels** : l'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, est l'ensemble des nombres.

Tous les ensembles sont inclus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Le symbole $\subset$ signifie "est inclus dans".
En fait, tous les naturels sont des entiers, tous les entiers sont des nombres décimaux qui eux sont des nombres rationnels, et enfin tous ces nombres sont des réels.
Le schéma suivant récapitule tout cela.

Exemples : Voici un exemple pour chaque ensemble.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...; 3456; ...5463474; ...\}$

$\mathbb{Z} = \{-1346780; ...; -345; -2; -1; 0; 1; 2; ...; 3456; ...5463474; ...\}$

$\mathbb{D} = \{-\frac{11}{100}; \frac{5}{10000}; \frac{7}{2}; 3,457; ...\}$

$\mathbb{Q} = \{-\frac{11}{9}; \frac{2}{3}; \frac{9}{14}; ...\}$

$\mathbb{R} = \{-2345678; \frac{11}{100}; \pi; \sqrt{2}; ...\}$

II - Valeurs approchées

Petit rappel : quand on dit qu'un nombre compris dans un intervalle, cela signifie qu'il est entre deux nombres, les deux bornes de cet intervalle. Ces deux bornes peuvent être inclues ou exclues de l'intervalle.

Définition : On appelle **valeur approchée** d'un réel x à la précision p tout nombre réel compris dans l'intervalle $[x-p; x+p]$.

Exemple : La lettre grecque π vaut : 3,14159... avec une infinité de nombres après la virgule. Sa valeur approchée au millième près (ou à 10^{-3} près) est 3,141.

En fait, pour donner la valeur approchée d'un nombre à 10^{-n} près, on donne le nombre avec n nombres après la virgule.

III - Divisibilité

Rappelez-vous, ce n'est pas si loin.

Définition : a est divisible par d si la division de a par d donne un quotient entier exact (sans reste donc).
Dans ce cas, a est un multiple de d et d est un diviseur de a.

Exemple : Le nombre 42 est divisible par 7 car $\frac{42}{7} = 6$.

Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, écrivez le sous la forme d'un produit de deux facteurs de toutes les façons possibles, en essayant successivement tous les nombres naturels successifs.

IV - Les nombres premiers

1 - Définition

Encore une définition. Vous en avez marre ? Vous voilà mal barré !

Définition : Un **nombre premier** est un entier supérieur ou égal à 2 qui n'admet aucun diviseurs autres que 1 et lui-même.

Voici tous les nombres premiers de 0 à 100 inclus :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; et 97.

Pour savoir si un nombre a est premier, c'est facile, il faut simplement le diviser par tous les nombres entiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

2 - Décomposition en produit de nombres premiers

Il faut savoir que :

Tout entier supérieur ou égal à 2 est le produit de nombres premiers.

Décomposer un nombre en produits de nombres premiers signifie qu'on l'écrit comme produit de nombres premiers.
Pour décomposer un nombre en produits de nombres premiers, il suffit de le diviser successivement par les nombres premiers.

Exemple : Donner la décomposition en produit de nombres premiers de 1386.
1386 est divisible par 2 : $1386 = 2 \times 693$.
693 est divisible par 3 : $693 = 3 \times 231$.
231 set divisible par 3 aussi : $231 = 3 \times 77$.
77 n'est pas divisible par 5, mais par 11 : $77 = 11 \times 7$, et 11 et 7 sont deux nombres premiers.
On en conclut que : $1386 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$.

Remarque : On se sert de cette décomposition pour entre autre simplifier une fraction.

V - Développement et factorisation

Dans cette section, je vais vous rappeler les notions de développement et de factorisation. Ces deux notions seront complétées dans un prochain chapitre. Soyez patient.

Développement :

$$a(b+c) = ab + ac$$

Quand on passe de la gauche à la droite, on **développe** et quand on passe de la droite vers la gauche, on **factorise**.
Voici les identités remarquables apprises en 3ème :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

VI - Les fractions

On en profite aussi pour rappeler les notions principales sur les fractions.

Propriétés : Voici les propriétés sur les fractions, b et c non nuls :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Pas besoin d'exemple, tout cela est acquis. Sinon, allez faire un petit tour dans les chapitres Fractions du collège.

VII - Les puissances

Vous avez appris à manipuler les puissances au collège, vous vous rappelez ?

Définition : Soient n entier positif et a un réel (non nul pour le second cas) :

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times ...}^{n facteurs}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times ...}_{n facteurs}}$$

Remarque : Par convention, $a^0 = 1$.

Propriétés : Voici les propriétés sur les puissances, a et b non nuls et m et n entiers :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$;
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$;
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- $(ab)^n = a^n \times b^n$;
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Si vous voulez des exemples pour les calculs de puissances, jetez un oeil aux cours de quatrième. Mais normalement, tout est acquis.

VIII - Les racines

Sachez que la notion de racine ne se limite pas à la racine carrée. Néanmoins, en seconde, vous n'utiliserez que celle-ci.

Propriétés : Voici les propriétés sur les racines carrées, a et b positifs :

- $\sqrt{a}^2 = a$;
- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{k^2 \times a} = \sqrt{k^2 a} = k \times \sqrt{a} = k\sqrt{a}$;
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque : On ne laissera jamais une racine au dénominateur. Pour ce faire, on multiplie la fraction (en haut et en bas) pas la racine du dénominateur pour l'enlever.
Regardez l'exemple suivant, vous comprendrez tout de suite.

$$\sqrt{\frac{25}{8}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{8}} = \frac{5}{\sqrt{4 \times 2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{4}$$

Exemple : Calculer :

$$A = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Allons-y. Regardez bien attentivement, vous comprendrez sans effort.
$A = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$
$A = \frac{(1-\sqrt{2})(2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}\times(2\sqrt{2})}$
$A = \frac{2\sqrt{2}-2\times 2}{4\times 2}$
$A = \frac{2\sqrt{2}-4}{8}$
On simplifie par 2.
$A = \frac{\sqrt{2}-2}{4}$

IX - Ecriture scientifique

Avant de clore ce chapitre, une dernière notion, très utilisée en physique, la notion **d'écriture scientifique**.

Définition : $a \times 10^n$ est **l'écriture scientifique** d'un nombre quand a est un chiffre strictement compris entre 0 et 10.

Exemple : L'écriture scientifique de 0,00323455 est $3,23455 \times 10^{-3}$.