Géométrie dans l'espace

Un chapitre de géométrie dans l'espace dans lequel je vais vous rappelez les définitions et les volumes de toutes les figures 3D que nous avions vu jusqu'ici, à savoir : les **prismes**, les **parallélépipèdes rectangles**, le **cylindre**, le **cône de révolution** et les pyramides. J'y ajouterai même deux figures 3D très importantes pour le Brevet de juin : la **boule** et la **sphère**.

En plus de rappelez les définitions et les volumes de ces figures 3D, je vais vous introduire leurs **sections planes**, c'est-à-dire si on les coupes avec un plan. Vous verrez, c'est assez intéressant.

Nous terminerons ce chapitre de géométrie dans l'espace par une partie sur la **réduction et l'agrandissement**, que nous avions déjà vu dans les chapitres précédents cette année certes, mais cette fois-ci nous l'étudierons dans l'espace 3D.

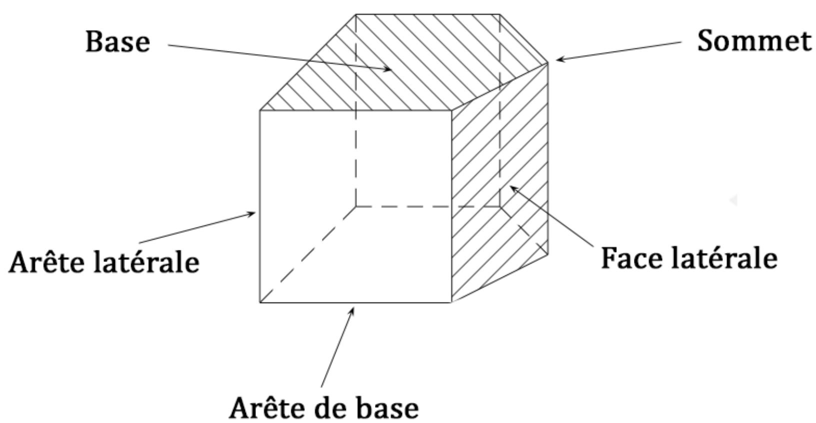
I - Prismes

1 - Définition

Voici la définition du prisme droit.

Prisme droit : Un prisme droit est un solide composé :
– De deux bases polygonales parallèles et superposables,
– De faces latérales rectangulaires perpendiculaires aux bases.

Notez également que le nombre de faces latérale et d'arêtes latérales est égal au nombre de côtés des bases.
De plus, toutes les arêtes latérales ont la même longueur qui est la **hauteur du prisme**.



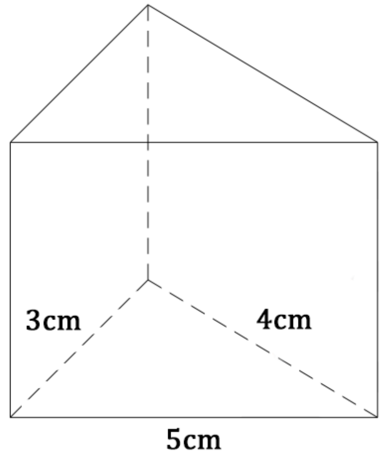
2 - Volume

Comme toute figure en 3D, elle possède un volume. Je vous donne ici la formule du **volume du prisme droit**.

Volume du prisme droit : Le volume d'un prisme droit s'obtient en multipliant l'aire d'une base par la hauteur.

Oui, il faut donc se rappeler des formules d'aires pour pouvoir espérer calculer le volume d'un prisme droit.

Exemple : Soit le prisme suivant :



L'aire de la base, qui est un triangle rectangle, vaut :

$$\mathcal{A} = \frac{3 \times 4}{2} = 6cm^2$$

La hauteur vaut, quant à elle :

$$h = 3cm$$

Donc, le volume de ce prisme droit vaut :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h = 6 \times 3 = 18cm^3$$

Remarque : On met un exposant 3 à l'unité du volume car on est en 3 dimensions. Rappelez-vous donc, une aire, en 2D, se note avec un 2 et un volume, en 3D, se note avec un 3.
L'unité quant à elle, est celle de la longueur est côtés du prisme.

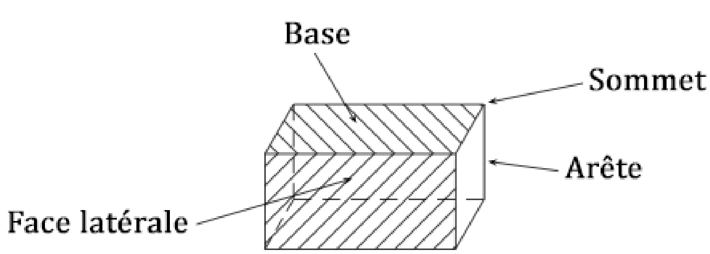
II - Parallélépipèdes rectangles

1 - Pavé droit

Voici la définition du parallélépipède rectangle.

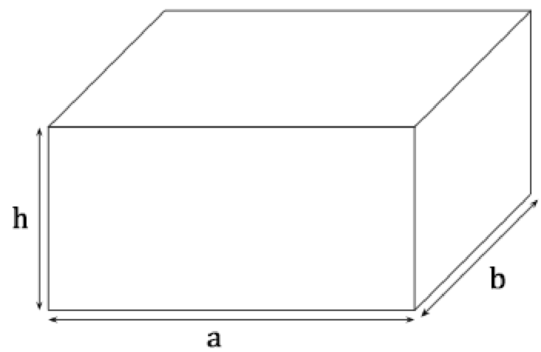
Parallélépipède rectangle : Un parallélépipède rectangle est un solide composé de 6 faces rectangulaires toutes perpendiculaires entre elles.

Il possède 8 sommets et 12 arêtes comme présentées sur la figure ci-dessous.
Parmi ses 6 faces, on distingue : 2 bases (une au dessus et une en dessous) et 4 faces latérales (sur les côtés).



Et le volume à présent.

Volume d'un parallélépipède rectangle : Soit le parallélépipède rectangle de longueur a, de largeur b et de hauteur h.

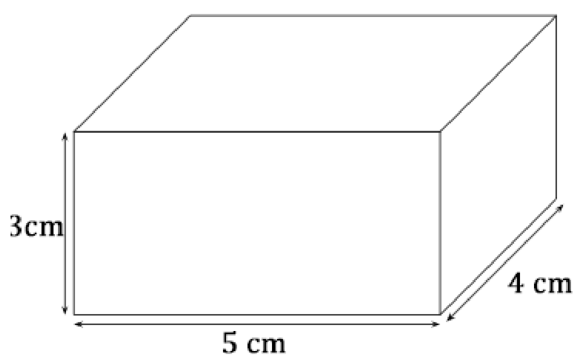


Son volume vaut :

$$\mathcal{V} = a \times b \times h$$

En fait, c'est l'aire du rectangle de base multipliée par la hauteur du parallélépipède rectangle.

Exemple : Le volume du parallélépipède suivant est $60cm^3$.



En effet :

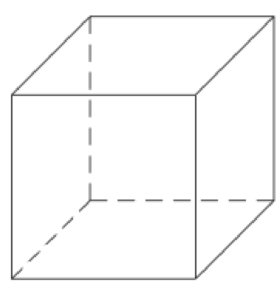
$$\mathcal{V} = 5 \times 4 \times 3 = 20 \times 3 = 60cm^3$$

2 - Cube

La définition du cube, c'est parti !

Cube : Un cube est un parallélépipède rectangle particuliers dont les faces sont carrées.

Il possède 12 arêtes de même longueur.



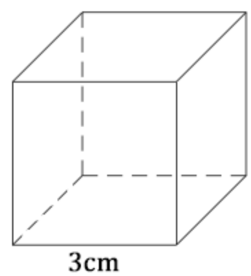
Pas très compliqué, c'est un parallélépipède rectangle, mais les faces sont carrées au lieu d'être rectangle, donc les arrêtes sont toutes égales.

Et le volume du cube.

Volume du cube : Le volume d'un cube de coté a est :

$$\mathcal{V} = a \times a \times a = a^3$$

Exemple : Le volume du cube suivant est $27cm^3$.



En effet :

$$\mathcal{V} = 3 \times 3 \times 3 = 27cm^3$$

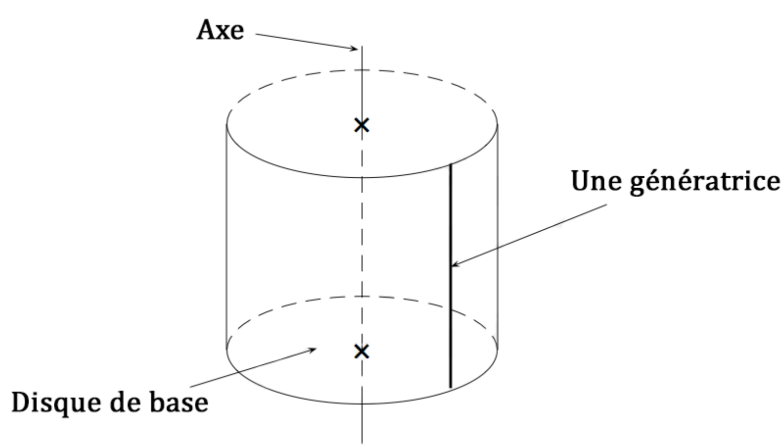
III - Cylindre

1 - Définition

Celle-ci, j'en suis sûr que vous vous en souvenez. Je me trompe ?

Cylindre de révolution : Un cylindre de révolution est un solide composé :
- De deux bases en forme de disque et parallèles,
- D'une surface latérale appelée surface cylindrique.

Sachez que la droite qui passe par les centres des deux disques de base est perpendiculaire aux base. C'est l'**axe du cylindre**.
De plus, tous les segments de la surface cylindrique perpendiculaire à la base est une **génératrice du cylindre**.



2 - Volume

Et son volume ? Mais si, rappelez-vous !

Volume du cylindre de révolution : Le volume d'un cylindre de révolution s'obtient en multipliant l'aire d'une base par la hauteur :

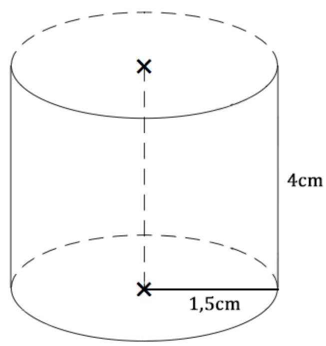
$$\mathcal{V} = \pi \times r \times r \times h$$

Rappelez-vous de la formule de l'aire d'un disque :

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r$$

Il suffit ensuite de la multiplier par la hauteur du cylindre de révolution.

Exemple : Soit le cylindre de révolution suivant :



L'aire de la base, qui est un disque de rayon 1,5cm, vaut :

$$\mathcal{A} = \pi \times 1,5 \times 1,5 = 7cm^2$$

La hauteur vaut, quant à elle :

$$h = 4cm$$

Donc, le volume de ce cylindre de révolution droit vaut :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h = 7 \times 4 = 28cm^3$$

3 - Aire latérale

Je vous donne la formule pour calculer l'**aire latérale** d'un cylindre, c'est-à-dire l'aire de la surface cylindrique.

Aire latérale du cylindre : L'aire latérale du cylindre de rayon r et de hauteur h vaut :

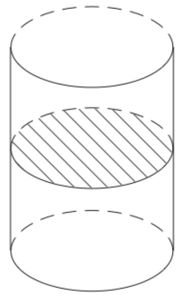
$$\mathcal{A} = h \times 2\pi \times r$$

Je ne vous donne pas d'exemple, c'est une encore simple formule à appliquer.

4 - Section plane

Cette partie sur la **section plane d'un cylindre** va répondre à la question : qu'obtient-on en coupant ("section") par un plan ("plane") un cylindre ?

Section plane d'un cylindre : La section plane d'un cylindre par un plan parallèle à ses bases est un cercle superposable à ses bases.



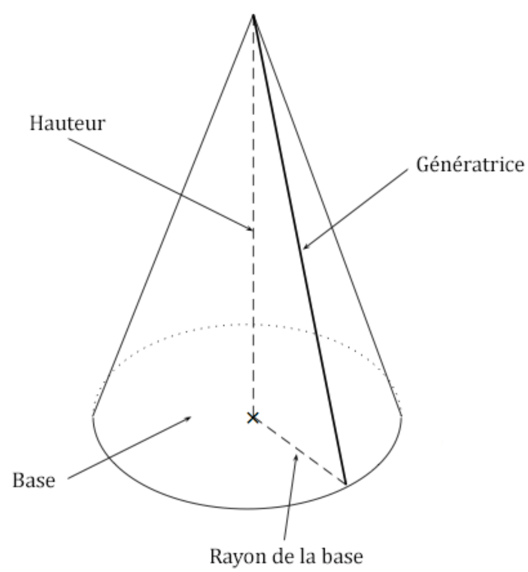
Eh oui ! Cela se comprend très bien sur la figure. Lorsque l'on coupe un cylindre par un plan, on obtient un cercle.

IV - Cône de révolution

1 - Définition

Nous commencerons d'abord par la définition du cône de révolution (pour changer).

Cône de révolution : Un cône de révolution est constitué d'une **base** en forme de disque et d'une **surface conique**.



On appelle **hauteur** du cône de révolution, le segment perpendiculaire à la base issu du sommet.
Le **rayon** d'un cône de révolution est le rayon de la base.
On peut générer le cône en faisant tourner un triangle rectangle autour de la hauteur. L'hypoténuse d'un tel triangle est appelé une **génératrice**.

2 - Volume

Puis son volume (pour changer encore).

Volume du cône de révolution : Le volume d'un cône de révolution s'obtient en multipliant l'aire d'une base par la hauteur, le tout divisé par 3 :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3} = \frac{\pi \times r \times r \times h}{3}$$

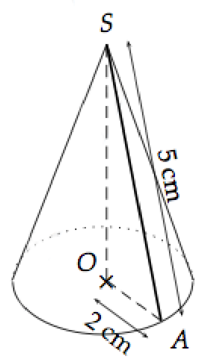
Rappelez-vous de la formule de l'aire d'un disque :

$$\mathcal{A} = \pi \times r \times r$$

Il suffit ensuite de la multiplier par la hauteur du cône de révolution et divisé le tout par 3.

C'est en fait l'aire d'un cylindre de révolution divisé apr 3.

Exemple : Soit le cône de révolution :



L'aire de la base, qui est un disque de rayon 2cm, vaut :

$$\mathcal{A} = \pi \times 2 \times 2 = 12,56cm^2$$

La hauteur vaut, quant à elle :

$$h = 5cm$$

Donc, le volume de ce cône de révolution droit vaut :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3} = \frac{12,56 \times 5}{3} = 20,93cm^3$$

3 - Aire latérale

Je vous donne la formule pour calculer l'**aire latérale** d'un cône de révolution, c'est-à-dire l'aire de la surface conique.

Aire latérale du cône de révolution : L'aire latérale du cône de révolution de rayon r et de génératrice g vaut :

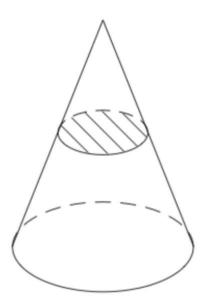
$$\mathcal{A} = g \times \pi \times r$$

Je ne vous donne pas non plus d'exemple pour l'aire latérale d'un cône de révolution, c'est une simple formule à appliquer, une fois de plus.

4 - Section plane

Qu'obtient-on en coupant ("section") par un plan ("plane") un cône de révolution ?

Section plane d'un cône de révolution : La section plane d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est une réduction de sa base.



Le nouveau cône ainsi créé est une réduction du cône initial.

Cela se comprend très bien grâce à la figure. Lorsque l'on coupe un cône par un plan, on obtient un cercle plus petit que sa base.

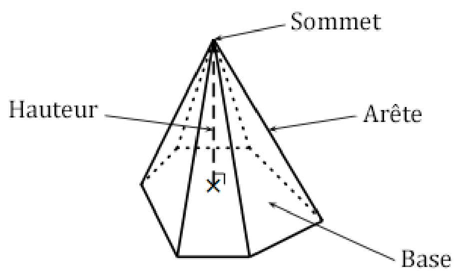
Nous aurons l'occasion de revenir sur cette notion de **réduction** dans la dernière partie de ce chapitre de géométrie dans l'espace.

V - Pyramides

1 - Définition

Vous savez ce qu'est une pyramide égyptienne ? Donc vous connaissez la définition que je vais vous apprendre tout de suite.

Pyramide : Une pyramide est constituée d'une **base polygonale** et de **faces latérales** triangulaires.



Les triangles des faces latérales ont un sommet commun que l'on appelle le **sommet** de la pyramide, leurs côtés sont les **arêtes** de la pyramide.
On appelle **hauteur** de la pyramide, le segment perpendiculaire à la base issu du sommet.

Un peu de vocabulaire à apprendre, mais à part cela, ça reste la pyramide égyptienne que vous connaissiez. Sauf que la pyramide égyptienne n'a souvent que 4 faces latérales.

Remarque : Une pyramide est **régulière** lorsque sa base est un polygone régulier (carré, triangle équilatéral, etc) et que la hauteur passe par le centre de la base. Dans ce cas, les faces sont des triangle isocèles superposables.
De plus, lorsque la base est un triangle, la pyramide est appelée **tétraèdre**. N'importe quel triangle peut alors être considéré come la base.

2 - Volume

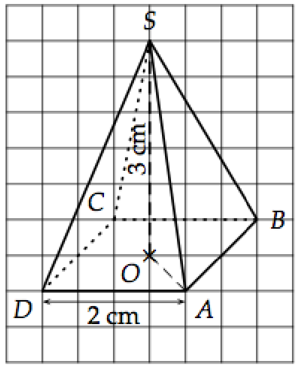
Le volume d'une pyramide...

Volume de la pyramide : Le volume d'une pyramide s'obtient en multipliant l'aire d'une base par la hauteur en divisant le tout par 3 :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3}$$

Il faut donc connaître ses formules d'aires pour calculer le volume d'une pyramide.

Vous avez dû el remarquer, c'est le volume d'un prisme droit, divisé par 3.
Exemple : Soit la pyramide suivante :



L'aire de la base, qui est un carré, vaut :

$$\mathcal{A} = 2 \times 2 = 4cm^2$$

La hauteur vaut, quant à elle :

$$h = 3cm$$

Donc, le volume de cette pyramide vaut :

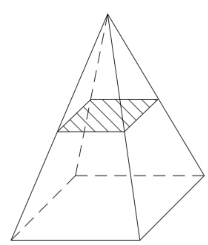
$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3} = \frac{4 \times 3}{3} = 4cm^3$$

Remarque : On met un exposant 3 à l'unité du volume car on est en 3 dimensions. Rappelez-vous donc, une aire, en 2D, se note avec un 2 et un volume, en 3D, se note avec un 3.
L'unité quant à elle, est celle de la longueur est côtés de la pyramide.

3 - Section plane

Cette partie sur la **section plane d'une pyramide** va répondre à la question : qu'obtient-on en coupant ("section") par un plan ("plane") une pyramide ?

Section plane d'un cône de révolution : La section plane d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est une réduction de sa base.



La nouvelle pyramide ainsi créée est une réduction de la pyramide initiale.

Cela se comprend très bien sur la figure. Lorsque l'on coupe une pyramide par un plan, on obtient une figure de même forme que la base mais plus petite.

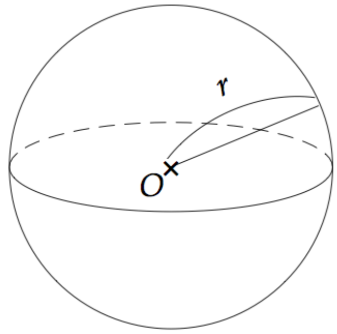
VI - Boule et sphère

1 - Volume d'une boule

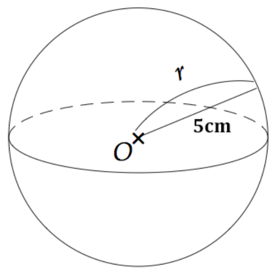
Une boule, vous en avez déjà entendu parlé ? Bah je vous donne la formule pour calculer son volume dans cette partie.

Volume d'une boule : Le volume d'une boule de rayon r est égal à :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$



Exemple : Soit la boule de rayon 5cm suivante :



Donc, le volume de cette boule vaut :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 125 = 523,33cm^3$$

2 - Aire d'une sphère

L'aire d'une sphère maintenant.

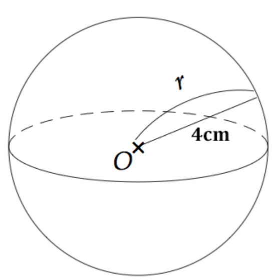
Mais je ne vois pas la différence entre une sphère et une boule ?

Remarque : On parle en général de sphère pour désigner le solide vide, et de boule pour désigner le volume plein.

Aire d'une sphère : Aire d'une sphère de rayon r est égal à :

$$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times r^2$$

Exemple : Soit la sphère de rayon 4cm suivante :



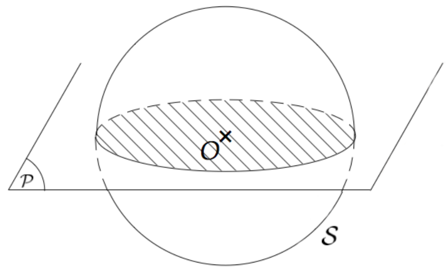
Donc, le volume de cette boule vaut :

$$\mathcal{V} = 4 \times \pi \times 4^2 = 4 \times \pi \times 16 = 20,96cm^2$$

3 - Section plane

Avec les sphères, qu'es-ce que cela donne ?
Qu'obtient-on en coupant ("section") par un plan ("plane") une sphère ?

Section plane d'une sphère : La section plane d'une sphère de rayon r par un plan est un cercle de rayon compris entre 0 et r.



Cela se comprend très bien sur la figure. Lorsque l'on coupe une sphère par un plan, on obtient un cercle de rayon maximum le rayon de la sphère.

Et la section plane d'une boule ?

Bonne remarque !

Remarque : La section plane d'une boule de rayon r par un plan est un disque de rayon compris entre 0 et r.

VII - Agrandissement et réduction

1 - Coefficients d'agrandissement et de réduction

Comme promis, une petite dernière partie sur l'agrandissement et la réduction en géométrie dans l'espace avec deux théorèmes.

Rapport de réduction : Le rapport de réduction d'une configuration est égal au rapport d'une longueur de la figure réduite par la longueur correspondante de la figure initiale.

Rapport d'agrandissement : Le rapport d'agrandissement d'une configuration est égal au rapport d'une longueur de la figure agrandie par la longueur correspondante de la figure initiale.

Ce sont de simples rapports. A chaque fois c'est la figure obtenue sur la figure de base pour avoir le rapport de réduction ou d'agrandissement.

2 - Volume d'un agrandissement et d'une réduction

Et quand c'est le volume, c'est une unité au cube. Donc, pour les agrandissement et les réductions, on devra les multiplier par...

Volume d'un agrandissement et d'une réduction : Dans une réduction ou un agrandissement de coefficient k (k non nul), les volumes sont multipliés par k^3.

Exemple : Le volume d'une figure réduit de 2 sera 6 fois plus petite : $2^3 = 6$.