Les racines carrées

Dans tout ce cours, on notera a un nombre **strictement positif**. On a souvent été amené à résoudre des équations. Prenons une équation du type $x^2 = a$ et essayons de la résoudre. Distinguons alors plusieurs cas :

1er cas : a est un **carré parfait**, c'est-à-dire qu'il est le carré d'un nombre, comme 16 est le carré de 4. Dans ce cas là, aucun problème.

2ème cas : a n'est pas un carré parfait. Pour résoudre l'équation on notera que la solution est la **racine carrée** de a, notée : $\sqrt{a}$.

Par exemple : $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$.

www.mathsbook.fr

I - Règles de calcul

1 - Règle de base

Règle de base :

$$\sqrt{a}^2 = a$$
$$\sqrt{a^2} = a$$

C'est la règle de base des racines carrées.

2 - Règle de simplification

Règle de simplification :

$$\sqrt{k^2 \times a} = \sqrt{k^2 a} = k \times \sqrt{a} = k\sqrt{a}$$

Exemples :
$\sqrt{6}^2 = 6$
$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$
$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$
Dans l'exemple qui suit, on va premièrement simplifier chaque terme, et si on trouve à la fin plusieurs produits d'une même racine on pourra les calculer.
$A = \sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} - 3 \times \sqrt{16 \times 3} + 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{5^2 \times 3} - 3\sqrt{4^2 \times 3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$
Comprenez bien : si on avait eut $5\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ on n'aurait rien pu calculer. Or, chaque terme ici avait un facteur avec la même racine, on a donc pu tout calculer.

3 - Règle de multiplication

Règle de multiplication :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Exemple : $5\sqrt{7} \times 4\sqrt{3} = (5 \times 4)\sqrt{7 \times 3} = 20\sqrt{21}$

4 - Règle de division

Règle de division : Pour $b \neq 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples :

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Remarque : On ne laissera jamais une racine au dénominateur. Pour ce faire, on multiplie la fraction (en haut et en bas) pas la racine du dénominateur pour l'enlever.
Regardez l'exemple suivant, vous comprendrez de suite.

$$\sqrt{\frac{25}{8}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{8}} = \frac{5}{\sqrt{4\times 2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{5\times\sqrt{2}}{2\times 2} = \frac{5\times\sqrt{2}}{4}$$

Remarque très importante : Il n'y a pas de règle pour l'addition (ou la soustraction) :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + b$$

Voici un autre exemple un (tout petit) peu plus complexe.

Exemple : Calculer l'expression suivante :
$A = (\sqrt{5}-2)^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\times\sqrt{5}\times 2 + 2^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$
On a juste utilisé l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

II - Résolution d'équations

Dans cette partie, nous allons résoudre l'équation $x^2 = a$, avec toujours a un nombre positif. Nous sommes alors face à plusieurs cas.

1er cas : $a < 0$
Un carré étant **toujours positif**, il ne peut-être égal à un nombre négatif (< 0). Donc l'équation n'a pas de solution.

2ème cas : $a = 0$ et donc la solution est la solution nulle : $x = 0$. Pas de problème.

3ème cas : $a > 0$
On traduit le a par $\sqrt{a}^2$,

$$x^2 = a = \sqrt{a}^2$$

On le fait passer à gauche de l'équation,

$$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$

Et maintenant on fait quoi ? Cette forme d'équation ne vous rappelle dont rien ? Souvenez-vous de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0$$

Rappelons-nous maintenant quand es-ce qu'un produit est nul ?

$$x+\sqrt{a} = 0 \text{ ou } x-\sqrt{a} = 0 \; x = -\sqrt{a} \text{ ou } x = \sqrt{a}$$

On a donc deux solutions pour l'équation $x^2 = a$ qui sont : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemples : L'équation $x^2 = 13$ a deux solutions : $\sqrt{13}$ et $-\sqrt{13}$.