Système d'équations

Nous avons vu, dans un précédent chapitre, les équations et inéquation, appris à les résoudre, etc. Mais ne-vous êtes-vous pas demander si on pouvez résoudre une équation à deux inconnues ? C'est l'objectif de ce chapitre.

www.mathsbook.fr

I - Système de deux équations

Si on vous donnait un système d'une équation avec deux inconnues, il y aura une infinité de solutions.
Par exemple, l'équation $x+y=2$ est une équation possédant deux inconnues x et y. Elle possède une infinité de solutions : $x=1$ et $y=1$ (on note $S=\{1;1\}$), $x=2$ et $y=0$ (on note $S=\{2;0\}$), etc.

Remarque : On dit que l'on cherche le **couple de nombre** $(x;y)$ qui vérifie l'équation.

Si on rajoute une autre équation à deux inconnues, et que l'on cherche un coule de nombres qui vérifie les deux équations, alors là on parle de **système d'équations**.

Définition : Un **système de deux équations** à deux inconnues est l'association de deux équations avec chacune deux inconnues.
On cherche la solution qui sera un couple de nombre $(x;y)$ qui vérifie les DEUX équations.

Remarque : En 3ème, les systèmes que nous étudierons auront toujours un seul couple solution.

Exemple : On considère le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x & = & y \end{array}\right.$$

Ce système a pour solution : $(1;1)$.

Comment avez-vous trouvé ce résultat d'un coup ? J'ai raté quelque chose ?
Rassurez-vous, vous n'avez rien loupé. Je vous explique ça dans la section suivante.

II - Methode de résolution

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un système (ou "système d'équations"). Cependant, je vais vous donner seulement la meilleure, et la plus simple, de toutes. En effet, cette méthode marche tout le temps.

Résolution de système : Deux principes pour la résolution d'un systèmes à deux équations à deux inconnues :

1. On peut multiplier (ou diviser) tous les termes d'une équation par un même nombre,
2. On peut additionner les deux équations terme-à-terme.

Une fois ces deux principes effectuées, on aura ramener le problème à une seule équation à une inconnue que l'on sait tous résoudre maintenant.

Expliquons bien : nous savions déjà que nous pouvons multiplier tous les termes d'une équation par un même nombre. Jusque là, pas de problème. Ensuite, on additionne en fait les x de la première équation avec ceux de la seconde, pareil pour les y, etc., dans le but de supprimer une des deux inconnues.
On trouvera donc une seul équation avec une inconnue, que l'on résout.
Puis on prend une des deux équations de départ (la plus "jolie") et on remplace l'inconnue trouver pour transformer cette équation en une équation à une seule inconnue, que l'on sait résoudre. Et voilà.
Regardez bien l'exemple qui suit. Il résume tout ce que je viens de dire.

Exemple : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y & = & 7 \\ 3y+5x & = & 10 \end{array}\right.$$

On va avant tout numéroter les lignes du système comme ceci :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y & = & 7(L1) \\ 3y+5x & = & 10(L2) \end{array}\right.$$

On range tout cela dans l'ordre, les x en premier, puis les y, pour pouvoir bien additionner après.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y & = & 7(L1) \\ 5x+3y & = & 10(L2) \end{array}\right.$$

On choisit ensuite quelle inconnue nous voulons supprimer. C'est comme on veut. Allons pour la suppression de y ! Demandons-nous : par quoi multiplier ces équations pour que les y sautent ? Trouvé ! On multiplie la première par 3 et la seconde par 2.
$(L1) \times 3$ et $(L2) \times 2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9x-6y & = & 21(L1) \\ 10x+6y & = & 20(L2) \end{array}\right.$$

A présent, on fait une addition terme-à-terme : $9x+10x=19x$, $-6y+6y=0$ (normal, c'est ce qu'on voulait) et enfin $21+20=41$.
On obtient donc l'équation suivante :

$$19x = 41$$

Que l'on résout pour trouver que :

$$x = \frac{41}{19}$$

On a trouvé x, cherchons y.
On va tout simplement remplacer la valeur trouvée de x dans une des équation de notre choix. Remplaçons x par $\frac{41}{19}$ dans $(L1)$.

$$3 \times \frac{41}{19} - 2y = 7$$

La solution de cette équation est :

$$y = \frac{-5}{19}$$

On a donc trouvé la solution du système :

$$(\frac{41}{19}; \frac{-5}{19})$$

L'exercice est alors terminé.

III - Résolution de problèmes

Bon, c'est bien beau tout ça. Mais pourquoi faire ?
Vous rencontrerez souvent des problèmes qui font intervenir des systèmes d'équations. Vous ne me croyez pas ? Regardez plutôt.

Exemple :

Vous allez manger dans un Fast-Food avec quatre de vos amis pour tester le nouveau Super Burger.
Seul deux de vos amis ont la carte étudiant qui réduit le prix du menu.
Vous passez à la caisse avec votre petite amie, qui elle a la réduction. Vous payez 13,60 euros.
Vos trois autres amis payent en tout 21euros.
Combien coûte le menu avec et sans la réduction étudiante ?

Oui, je sais. Quand vous allez au MacDo, vous ne pensez pas à ça ! Mais sachez qu'au Brevet, vous aurez surement un problème de ce type. Alors écoutez bien.

On va simplement traduire ce problème par un système.
Soit x le prix du menu sans la réduction et y son prix avec la réduction.
On en déduit donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 13,60 \\ 2x + y & = & 21 \end{array} \right.$$

La première équation signifie : "un menu avec réduction et un menu sans réduction valent en tout 13,60 euros". C'est quand vous passez à la caisse avec votre petite amie rappelez-vous.
La seconde équation signifie : "un menu avec réduction et deux menus sans réduction valent en tout 21 euros". C'est ce que payent vos trois autres amis.

Il n'y a plus qu'à résoudre ce système. Je vous laisse faire ça pour vous entraîner. Je vous donne juste la réponse :

$$S = \{(7,4;6,2)\}$$

On peut même rajouter qu'avec la carte étudiant, deux de vos amis ont bénéficié d'une réduction de 1,20 euros ($7,4 - 6,2 = 1,2$), soit d'environ 16% ($\frac{1,2}{7,4} \simeq 0,16$).

Allez, on arrête là pour le moment. Bon appétit !