Triangles et parallèles

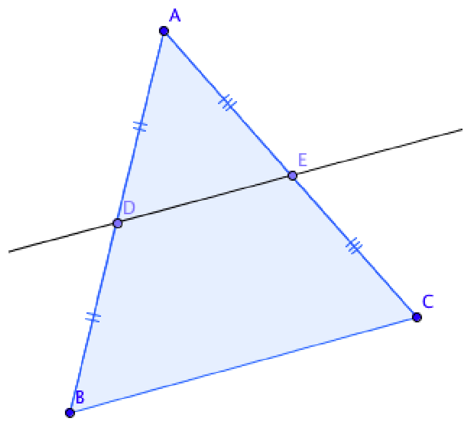
Après vous avoir appris à utiliser les triangles, ainsi que des droites parallèles, nous allons mixer les deux pour vous apprendre des théorèmes très sympathiques que vous utiliserez souvent dans vos exercices de géométrie cette année.

I - Théorèmes des milieux

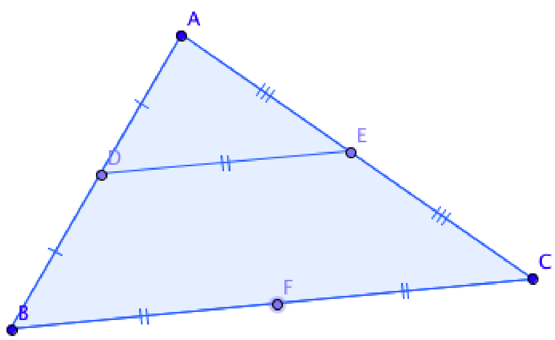
Il existes trois théorèmes sur les milieux.

Théorèmes des milieux : Voici ses trois théorèmes.

- Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

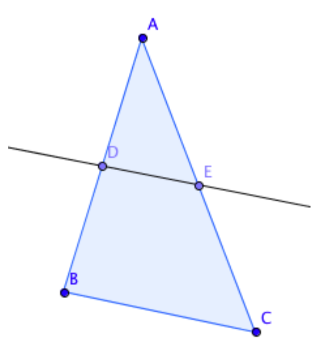


- Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.



- Dans un triangle, la croie qui passe par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté.

Exemple : Soit les triangles ABC et ADE. D est le milieu de $[AB]$ et les droites (DE) et (BC) sont parallèles. On donne $DE = 5cm$.
Calculer BC.

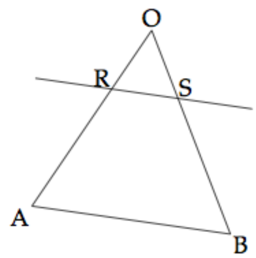


On considère les triangles ABC et ADE.
On sait que dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté.
Or, D est le milieu de $[AB]$ et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
De plus, $E \in [AC]$.
Donc, E est le milieu de $[AC]$.
Or, on sait que dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.
Avec $DE = 5cm$, on a alors : $BC = 2DE = 2 \times 5 = 10cm$.

II - Théorème de Thalès

Vous allez adorer ce théorème, j'en suis sûre.

Théorème de Thalès : On considère deux triangles, OAB et ORS, qui ont un sommet commun, le point O. De plus, les droites (AB) et (RS) sont parallèles.



On a alors les relations d'égalité suivantes :

$$\frac{OR}{OA} = \frac{OS}{OB} = \frac{RS}{AB}$$

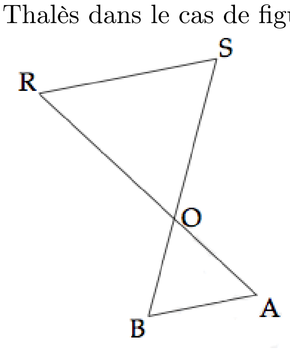
Comprennez bien ces formules. Prenons par exemple le côté $[OA]$. On a $R \in [OA]$. On fait le petit sur le grand à chaque fois, le sommet commun jusqu'au point R sur le sommet commun jusque l'autre point, le point A, soit :

$$\frac{OR}{OA}$$

On peut aussi faire le grand sur le petit. Quoi qu'on fasse comme fraction, on le fait dans toute l'égalité.

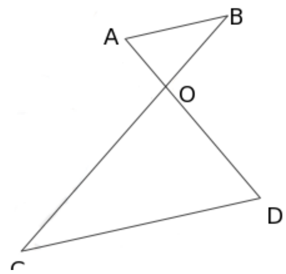
$$\frac{OA}{OR} = \frac{OB}{OS} = \frac{AB}{RS}$$

Remarques :
- Lorsque l'on fait sur les côtés qui ne sont pas parallèles, on a toujours en commun au numérateur et au dénominateur des fractions le point O, somme commun des deux triangles.
- On peut également appliquer le théorème de Thalès dans le cas de figure suivant :



On a bien deux triangles, OAB et ORS, qui ont un sommet commun, le point O et les droites (AB) et (RS) sont parallèles.

Exemple : On considère la figure suivante. On suppose que $(AB)//(CD)$.



On donne : $AO = 2cm$, $BO = 3cm$, $CO = 6cm$ et $CD = 8cm$.
Calculer AB.

Je vais vous donner la correction type à adapter à chaque fois que vous serez confronté à cette situation. Tachez de la reproduire au mot près.
On considère les triangles ABO et CDO de sommet commun O.
De plus, d'après l'énoncé, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Nous avons toutes les conditions requises pour appliquer le théorème de Thalès.

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

On va prendre deux fractions dont une que l'on connait entièrement et l'autre où l'on connait une valeur et l'autre est la valeur recherchée.
La fraction $\frac{OB}{OC}$ est entièrement connue car $BO = 3cm$ et $CO = 6cm$, on la garde.
On veut calculer AB et l'on connait CD, prenons donc $\frac{AB}{CD}$.
On a donc :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

Isolons la valeur que l'on veut calculer, c'est-à-dire AB, en faisant passé le CD du dénominateur de droite au numérateur de gauche.

$$\frac{OB \times CD}{OC} = AB$$

On fait l'application numérique en utilisant les valeurs données dans l'énoncé.

$$AB = \frac{3 \times 8}{6} = 4cm$$

Nous avons terminé l'exercice.
Cela peut parraîttre long, mais c'est parce-que j'ai bien prix mon temps pour tout vous expliquer.

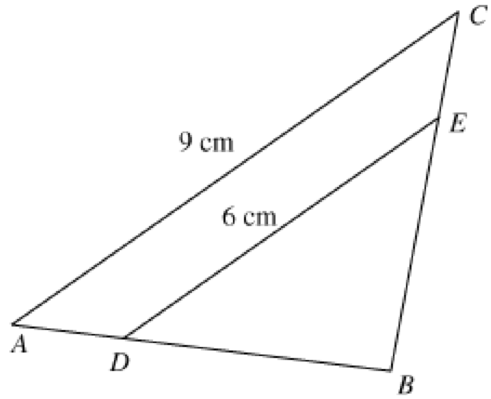
III - Agrandissement et réduction

Pendant qu'on est dans le thème, une dernière partie pour aborder l'**agrandissement** et la **réduction**.

Agrandissement et réduction : Un agrandissement est la multiplication de toutes les longueurs d'une figure par un nombre $k > 1$, appelé **facteur d'agrandissement**.
Une réduction est la multiplication de toutes les longueurs d'une figure par un nombre $0 < k < 1$, appelé **facteur de réduction**.

Je vous donne un exemple pour que vous compreniez mieux.

Exemple : Soit la figure suivante :



Ici, les droites (AC) et (DE) étant parallèles, on passe du triangle DBE au triangle ABC par un agrandissement de facteur :

$$\frac{9}{6} = 1,5$$

En effet, pour passer du triangle DBE au triangle ABC, on doit multiplier les longueurs des côtés par 1,5. On dit, dans ce cas d'agrandissement, que 1,5 est le facteur d'agrandissement.

Et inversement, pour passer du triangle ABC au triangle DBE, on doit diviser les longueurs des côtés par 1,5. On dit dans ce cas là que 1,5 est le facteur de réduction.