Dérivation

Ce chapitre sur la dérivation n'est en fait qu'une révision du chapitre de l'année dernière. Nous allons tout reprendre et y ajouter quelques notion.
Je vous inquiétiez pas si vous trouver qu'il est assez similaire à celui de l'an dernier, c'est normal. On revoit tout cette année.

www.mathsbook.fr

I - Dérivée d'une fonction

1 - Nombre dérivée d'une fonction en a

Nous allons utiliser la notion de limite pour montrer la **dérivabilité** d'une fonction, ainsi que pour trouver son nombre dérivé.

Définition : Soit f une fonction définie en a et $h \in \mathbb{R}$.
La fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre D appartenant à $\mathbb{R}$ tel que :

$$D = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ce nombre D, s'il existe, est appelé **nombre dérivé** de f en a et on le note :

$$D = f'(a)$$

Remarque : Vous préférerez mieux la formule ainsi :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \overset{x=a+h}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

J'ai poser $x = a + h$.

Ce n'est en fait que une simple formule. Oui bon, une formule, que je vais redécortiquer avec vous.
On veut savoir si la fonction f est dérivable en un point a et si oui, calculer sa dérivée en ce point. On va procéder de la façon suivante :

1. On calcule $f(a)$ en remplaçant la variable de la fonction par a,
2. On trouve la différence $f(x) - f(a)$,
3. Cette différence prend le dénominateur $x - a$,
4. Enfin, on fait tendre le x de la quantité obtenue vers la valeur de a.

Voici un exemple.

Exemple : La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en 5 et son nombre dérivé vaut 10.
En effet :

$$\frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{x^2 - 5^2}{x - 5} \overset{factorisation}{=} \frac{(x-5)(x+5)}{x - 5} \overset{Simplification}{=} x + 5$$

On calcule la limite en 2 de la quantité obtenue :

$$\lim_{x \to 5} x + 5 = 10$$

Donc, la fonction carrée est dérivable en 2 et $f'(5) = 10$.

Remarque importante : Si on vous demande si une fonctionne st dérivable en un point particulier, c'est comme ça qu'il faut faire. Si vous calculer simplement la dérivée (comme nous allons l'apprendre dans la suite su chapitre) et que vous dites qu'elle existe donc la fonction dérivable ce sera entièrement hors sujet.

2 - Fonction dérivée

Nous avons vu que la notion de nombre dérivé en un point a faisait intervenir un réel $f'(a)$. Il existe en effet une **fonction dérivée** que je vais vous définir maintenant.

Définition : Soit f une fonction dérivable et définie sur un intervalle I.
On appelle **fonction dérivée** la fonction qui à chaque réel x de I associe son nombre dérivée.
On la note f' :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

3 - Dérivées usuelles

Enfin, nous rentrons dans le vif du sujet. Nous allons pouvoir calculer des dérivées grâce aux dérivées usuelles du tableau suivant.

Fonction	Dérivée
k $(k \in \mathbb{R})$	0
x^n $(n \in \mathbb{N}*)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $(x \neq 0$ $n \in \mathbb{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$ $(x > 0)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ce tableau est composées de formules directement prêtes à être utilisées. Il doit être connu PAR COEUR.
Il sera complété dans l'année, pour y ajouter notamment les dérivées des fonctions logarithme et exponentielle.

4 - Opérations sur les dérivées

Cette partie est obligatoire si nous voulons calculer des dérivées.
On vous posera obligatoirement une question sur ça durant l'épreuve de fin d'année que vous redoutez tous.

Opérations sur les dérivées : Soient u et v deux fonctions dérivables et définies sur un même intervalle I et k un réel.

- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$,
- $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
- $k \times u$ est dérivable sur I et $(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$,
- Si v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$,

Résumons :

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u \times v)' = u'v + uv'$
- $(ku)' = ku'$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour calculer des dérivées. Alors c'est parti !

Exemples : Voici un certains nombre d'exemples à bien comprendre.

- La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2$ est $f'(x) = 1$.
  En effet :

$$f'(x) = (x^1)' + (2)' = 1x^0 + 0 = 1$$

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées. De plus, $x = x^1$, donc on la dérivé de x est : $x' = 1x^0 = 1$ car tout nombre à la puissance 0 vaut 1.

- La dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - x + 3$ est $g'(x) = 4x - 1$.
  En effet :
  $$g'(x) = 2 \times (x^2)' - (x)' + (3)' = 2 \times 2(x^1) - 1 = 4x - 1$$
  La dérivée de x^2 est $(x^2)' = 2x$ et donc la dérivée de $2x^2$ est $(2x^2)' = 2 \times 2x = 4x$.

- La dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $h(x) = \frac{x^2+3x-1}{2x}$ est $h'(x) = \frac{x^2+1}{2x^2}$.
  En effet, on applique d'abord la formule :
  $$h'(x) = \frac{(x^2 + 3x - 1)'(2x) - (x^2 + 3x - 1)(2x)'}{(2x)^2}$$
  On calcule les dérivées,
  $$h'(x) = \frac{(x^2 + 3x - 1)'(2x) - (x^2 + 3x - 1)(2x)'}{(2x)^2} = \frac{(2x + 3)(2x) - (x^2 + 3x - 1)(2)}{4x^2}$$
  On développe tout ça.
  $$h'(x) = \frac{(2x + 3)(2x) - (x^2 + 3x - 1)(2)}{4x^2} = \frac{(4x^2 + 6x) - (2x^2 + 6x - 2)}{4x^2}$$
  On calcule le numérateur en faisant attention de changer les signes de la seconde parenthèse à cause du signe -,
  $$h'(x) = \frac{(4x^2 + 6x) - (2x^2 + 6x - 2)}{4x^2} = \frac{4x^2 + 6x - 2x^2 - 6x + 2}{4x^2} = \frac{2x^2 + 2}{4x^2} = \frac{x^2 + 1}{2x^2}$$
  Voilà.

5 - Variations

Je vous avait dit que la dérivée d'une fonction allait nous aider à l'étude de ses variations, vous rappelez-vous ?

Théorème : Soit f une fonction dérivable et définie sur un intervalle I.

- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I,
- Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I,
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I,
- Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I,
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : Quand on vous demande d'étudier une fonction, vous étudierez ses variations à l'aide de sa dérivée.

L'exemple suivant est très important. Il résume tout jusqu'ici. Vous devez savoir le reproduire les yeux fermés !

Exemple : Nous allons étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x + 2}$$

- Domaine de définition : La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, car -2 est la valeur interdite.

- Dérivée :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3x - 1)'(x + 2) - (x^2 - 3x - 1)(x + 2)'}{(x + 2)^2} = \frac{(2x - 3)(x + 2) - (x^2 - 3x - 1)(1)}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x^2 + 4x - 3x - 6) - (x^2 - 3x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 3x - 6 - x^2 + 3x + 1)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$$

– <u>Tableau de variations</u> : Le dénominateur, étant un carré, est toujours positif. On va donc se préoccuper du signe de numérateur pour déterminer les variations de f.
Les variations d'un polynôme du second degré, nous avons justement vu cela au chapitre précédent.
Soit le polynôme $P(x) = x^2 + 4x - 5$. Calculons $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

Donc le polynôme $P(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Le polynôme $P(x)$ est du signe de a, donc positif si $x \in]-\infty; -5[U]1; +\infty[$ et négatif si $x \in]-5; 1[$.
On peut à présent dresser le tableau de variation.
La première ligne désigne les valeurs de x. Il ne faut pas oublier la valeur interdite.
Dans la seconde, on met la dérivée et ses signes en fonction justement des valeurs de$x$.
Dans la troisième et dernière ligne, on met les variations de la fonction f.
On aura besoin des valeurs de $f(-5)$ et $f(1)$, calculons-les.

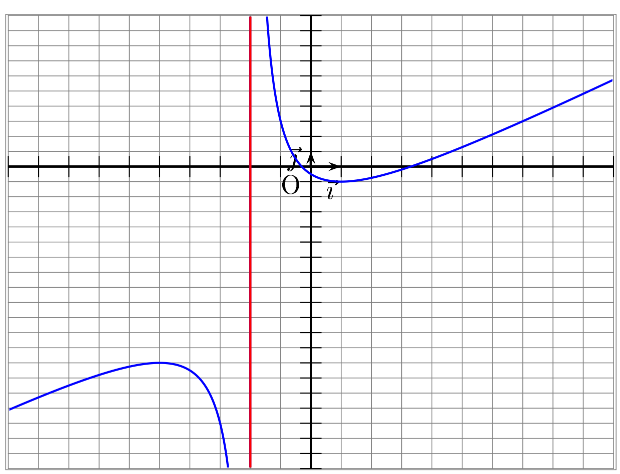
$$f(-5) = \frac{(-5)^2 - 3 \times (-5) - 1}{(-5) + 2} = \frac{25 + 15 - 1}{-3} = -13$$

$$f(1) = \frac{(1)^2 - 3 \times 1 - 1}{1 + 2} = \frac{1 - 3 - 1}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Voici donc le fameux tableau de variations.

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-13	$\searrow$	‖	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

– <u>Représentation graphique</u> : Vous savez faire.



Fin de l'étude.

6 - Extremum

La dérivée d'une fonction nous donne aussi ses extremum.

Propriétés :
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
  Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
  Si la fonction dérivée $f'(x_0)$ s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0.

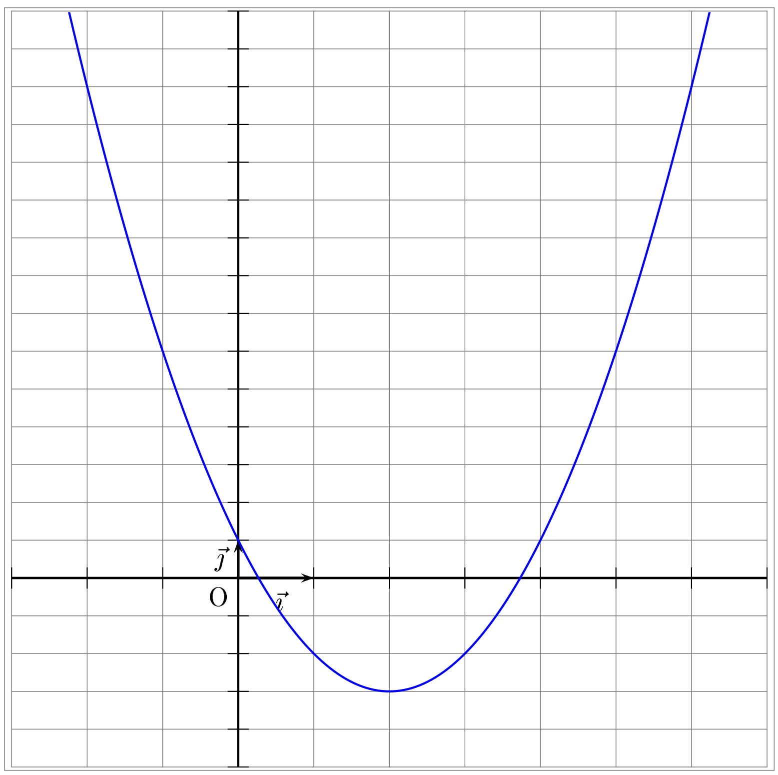
Exemple : Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculons sa dérivée.

$$f'(x) = (x^2)' - 4(x)' + (1)' = 2x - 4$$

La fonction s'annule pour :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Donc, la fonction f admet un extrema en $x = 2$.
Comment sait-on si se sont des minimum ou des maximum ?
Si la fonction est croissante puis décroissante, c'est le maximum.
Si la fonction est décroissante puis croissante, c'est le minimum.
Ici, la fonction est décroissante jusque $x = 2$ puis croissante. Donc, $f(2)$ est le minimum de la fonction f car pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geqslant f(2)$.
Cela se voit très bien sur la courbe de la fonction.



Remarque importante : Attention, si on a une dérivée nulle, on a pas forcément un extrema ! Le maximum et le minimum d'une fonction est unique.
Rappellez-vous : M est un maximum de f si pour tout x : $f(x)$ et m est un minimum de f si pour tout x : $f(x) \geqslant m$.

II - Approximation affine et tangente à la courbe en un point

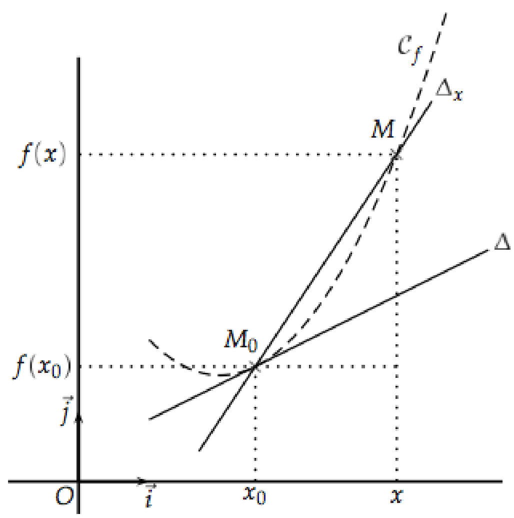
On peut traduire la notions de dérivée d'une autre façon.

Propriété : Si f est dérivable en a, alors $f(x) = (x-a)f'(a) + f(a) + (x-a)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.
On appelle **approximation affine** de f : $f(x) = (x-a)f'(a) + f(a)$

C'est quoi ce "ϵ" ?
Il se lit "Espilon", c'est une lettre grecque.
Cette propriété signifie que lorsque x est proche de a, alors une approximation de $f(x)$ est $(x-a)f'(a)+f(a)$.
La quantité $(x-a)\epsilon(x)$ représente en fait l'erreur commise lorsque l'on remplace $f(x)$ par $(x-a)f'(a)+f(a)$.

Introduisont à présent la notion de **tangente à la courbe**.

Soit f une fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_f$.
Soit $M_0(x_0; f(x_0))$ un point de $\mathcal{C}_f$.
Soit $M(x; f(x))$ un point de $\mathcal{C}_f$.
Soit Δ_x la droite passant par M_0 et M.



Quand x s'approche de x_0, alors la droite Δ_x pivote autour du point M_0 et le point M glisse sur la courbe $\mathcal{C}_f$ vers le point M_0.
Quand x est très proche de x_0, c'est-à-dire quand x tend vers x_0, la droite Δ_x bascule alors vers une droite limite Δ qu'on appelle **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point M_0.

Le coefficient directeur de la droite Δ_x est :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Alors le coefficient directeur de la droite Δ est :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Vous retiendrez la chose suivante :

Le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse x_0 est $f'(x_0)$.

On vient de parler de **tangente à la courbe** sans même l'avoir définit. Rattrapons-nous en la définissant maintenant !

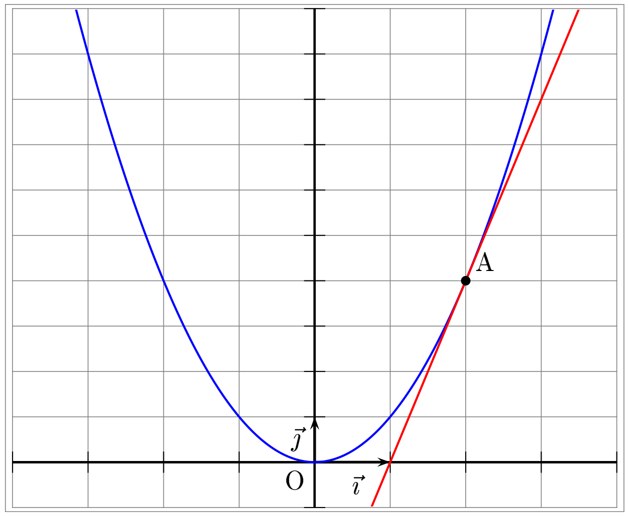
Définition : L'équation de la droite tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse x_0 est :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Exemple : L'équation de la tangente en $A(2;4)$ de la fonction carrée est $y=4[(x-2)+1]$.
En effet :

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=2\times 2(x-2)+4=4(x-2)+4=4[(x-2)+1]$$

Car la dérivée de la fonction carré est la fonction $f'(x)=2x$.



Il faut toujours que le point où l'on calcule la tangente appartienne à la courbe ?
Non, pas du tout. On calcule la tangente en un point désigné par son abscisse uniquement.

III - Théorème des valeurs intermédiaires

Nous avons déjà vu ce puissant théorème lors de notre dernier chapitre sur la continuité. Le revoilà ici, utilisé avec la dérivation.

Théorème des valeurs intermédiaires : Si f est dérivable et si $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

C'est en fait le même théorème que celui avec la continuité.
En effet, une fonction continue est dérivable. Donc quand on dit que f est dérivable, c'est qu'elle est forcément continue.
De plus, $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ signifie que f est strictement monotone.
On retrouve la même chose.
Je vous laisse donc revoir l'exemple du chapitre passé si vous le désirez.