

# CONDITIONNEMENT

On passe à présent à la partie sur les probabilités en terminale ES. Cette année, cette partie est plus complète que les précédentes. Composée de quatre gros chapitre, elle est primordiale pour réussir votre baccalauréat de juin prochain.

On commence avec ce chapitre sur le conditionnement et l'indépendance dans lequel je vais d'abord vous rappeler le vocabulaire relatif aux probabilités avant d'attaquer la partie sur les probabilités conditionnelles. Une partie est consacrée aux variables aléatoires avec notamment les formules d'espérance, de variance et d'écart type. Deux gros théorèmes des probabilités vont être étudiés dans ce cours de maths : la loi de Bernoulli et la loi binomiale.

[www.mathsbook.fr](http://www.mathsbook.fr)

## I - RAPPELS DE PROBABILITÉS

On comment ce chapitre sur les probabilités en rappelant quelques notions vues dans les années précédentes. Parmi elles, le vocabulaire des ensembles et celui des probabilités et des événements.

### 1 - ENSEMBLES

Des rappels tout d'abord sur les ensembles, indispensables pour apprendre à calculs des probabilités.

**Ensembles** : Soit  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

- L'ensemble  $A \cap B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  commun à  $A$  et  $B$ .
- L'ensemble  $A \cup B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui appartiennent soit à  $A$  soit à  $B$ .
- L'ensemble  $\bar{A}$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartient pas à  $A$ .
- $Card(A)$  est le nombre d'éléments de  $A$ .

Il n'y a rien à dire pour le moment, ce ne sont que des définitions de rappels.

### 2 - VOCABULAIRE DE PROBABILITÉS

On rappelle quelques mots de probabilités dans cette partie de cours. Vous rappelez-vous ?

**Vocabulaire des probabilités** :

- **Expérience aléatoire ou éventualité** : Une expérience aléatoire ou éventualité est une expérience dont le résultat est l'effet du hasard.
- **Univers** : L'univers est l'ensemble que l'on note  $\Omega$  de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : Un événement est une partie de  $\Omega$ .
- **Événement élémentaire** : Un événement élémentaire est un singleton de  $\Omega$ .
- **Événement contraire** : Un événement contraire d'un événement  $A$ , noté  $\bar{A}$ , est la partie complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ .
- **Événement incompatibles** : Deux événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ .

Encore et toujours des rappels... Vous vous en souveniez ?

Exemple : Prenons l'exemple du jeu de dés.

- C'est une éventualité.
- L'univers est :  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
- Soit  $A$  l'événement "obtenir un chiffre multiple de 2", alors :  $A = \{2; 4; 6\}$ .
- Le singleton  $\{3\}$  est un événement élémentaire du jeu de dés.
- Si  $A = \{2; 4; 6\}$ , alors  $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ .
- Les événements  $A = \{2; 5; 6\}$  et  $B = \{1; 3\}$  sont incompatibles car ils n'ont aucun chiffres en commun

### 3 - DÉFINITION DE LA PROBABILITÉ

Bon, on est dans le chapitre sur les probabilités mais sauriez-vous définir ce terme de "probabilité"? C'est l'objet de cette partie.

**Probabilité** : Soit un univers  $\Omega$  ayant  $n$  éléments :  $\Omega = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ .

Définir une probabilité sur  $\Omega$  c'est associer à chaque élément  $\{a_i\}$  un réel positif  $p_i$  tels que leur somme vaut 1 :

$$\sum_{k=1}^n p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

On dit alors que la **probabilité** de l'événement élémentaire  $a_i$  est  $p_i$ .

La probabilité d'un événement  $A$  est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans  $A$ .

Reprenons la dernière phrase et donnons un exemple simple.

Si on a un événement  $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ , alors la probabilité de  $A$  vaut :

$$p(A) = \sum_{k=1}^n p(\{a_k\}) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + \dots + p(\{a_n\}) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

### 4 - PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉ

Il est temps de répéter les différentes propriétés relatives aux probabilités.

**Propriétés des probabilité** :

- La probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- $p(\emptyset) = 0$ .
- $p(\Omega) = 1$ .
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .

Bon, maintenant que je vous ai tout rappeler, on peut passer à la section de cette année : les probabilités conditionnelles.

## II - PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Dans cette partie, nous étudierons en premier lieu le conditionnement, puis l'indépendances et nous finirons par une formule, celle des probabilités totales. On y va ?

### 1 - CONDITIONNEMENT

Je vais vous introduire cette partie sur le conditionnement avec l'exemple d'un jeu de 54 cartes décomposées comme ceci : 13 ♥, 13 ♦, 13 ♣, 13 ♠ et 2 jokers. Un jeu de carte tel que vous le connaissez.

Nous allons appliquer toutes les propriétés de probabilité vues précédemment dans cet exemple.

Définissons tout d'abord deux événements :

- L'événement  $A$  est "obtenir un As",

- L'événement  $B$  est "obtenir un coeur".

Combien y a-t-il d'As dans un jeu de 54 cartes ? Il y en a 4, oui. Donc, la probabilités d'avoir un As est de  $\frac{4}{54} = \frac{2}{27}$ , que l'on note ainsi :

$$P(A) = \frac{4}{54} = \frac{2}{27}$$

Combien y a-t-il de coeurs dans ce jeu ? 13 d'après l'énoncé. Donc, la probabilités d'avoir un coeur est de  $\frac{13}{54}$ , que l'on note ainsi :

$$P(B) = \frac{13}{54}$$

Combien y a-t-il d'As de coeurs dans ce jeu de cartes ? Un seul sur les 54 cartes. On notera donc :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{54}$$

Combien y a-t-il d'As dans l'ensemble des coeurs du jeu ? Un seul en effet. Un seul sur les 13 coeurs du jeu de 54 cartes. Là on croise la probabilité de  $A$  et celle de  $B$ , on calcule la probabilité de  $A$  sur un univers qui se réduit à l'ensemble des coeurs, on dit "probabilité de  $A$  sachant  $B$ " et l'on note ça :

$$P_B(A) = \frac{1}{13}$$

Oh mais... Que remarque-t-on ? Que :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{54}}{\frac{13}{54}} = \frac{1}{13} = P_B(A)$$

C'est la propriété des probabilités conditionnelles !

**Conditionnement** : Soient  $A$  et  $B$  deux événements, avec  $A$  de probabilité non nulle. On définit la **probabilité de  $B$  sachant  $A$**  par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule incontournable dans ce chapitre sur le conditionnement. Grâce à elle, vous saurez calculer la majorité des probabilités "simples" que l'on vous demandera.

## 2 - INDÉPENDANCE

Pour cette partie, prenons à présent un jeu de 52 cartes : 13 ♥, 13 ♦, 13 ♣, 13 ♠.

Toujours les mêmes deux événements :

- L'événement  $A$  est "obtenir un As",
- L'événement  $B$  est "obtenir un coeur".

Vous comprendrez bien évidemment que :

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P_B(A) = \frac{1}{13}$$

Que remarque-t-on ? Que :

$$P(A) = P_B(A)$$

En gros, cela veut dire que la proportion des As dans ce jeu de 52 cartes est la même que la proportion des As dans l'ensemble des coeurs. On a une chance sur 13 de tomber sur un As parmi les 52 cartes et une chance sur 13 de tomber sur un As de coeur parmi les coeurs.

On dira que les événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants**, soit que  $B$  n'a pas d'influence sur la réalisation de  $A$ .

De là, je vous donne la définition de l'indépendance.

**Indépendance** : Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

On a aussi le théorème suivant.

**Théorème de l'indépendance** : Soient  $A$  et  $B$  deux événements de probabilités non nulles.

On a alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A)$$

Je vous l'ai prouvé dans l'exemple d'introduction, donc pas besoin d'en rajouter.

### 3 - FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Une formule pour finir cette section sur les probabilités conditionnelles, celle des probabilités totales.

Avant cela, juste une petite définition.

**Partition** : Soit un ensemble  $E$ .

Les événements de probabilités non nulles  $\{E_1; E_2; E_3; \dots; E_n\}$  forment une **partition** de  $E$  si et seulement si :

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, E_i \in E$ ;
- Les événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont deux à deux incompatibles,
- Leur réunion est égale à l'ensemble  $E$ .

Maintenant la formule.

**Formule des probabilités totales** : Soit  $(A_1; A_2; \dots; A_n)$  une partition de  $\Omega$ .

Alors, pour tout événement  $B$  de  $\Omega$ , on aura :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Un petit exemple pour appliquer tout ça et pour que vous compreniez l'intérêt.

Exemple :

Le personnel d'une entreprise est composé de 70% de femmes. 10% d'entre elles boivent du café, ainsi que 20% des hommes.

Quelle est la proportion des consommateurs de café dans l'entreprise ?

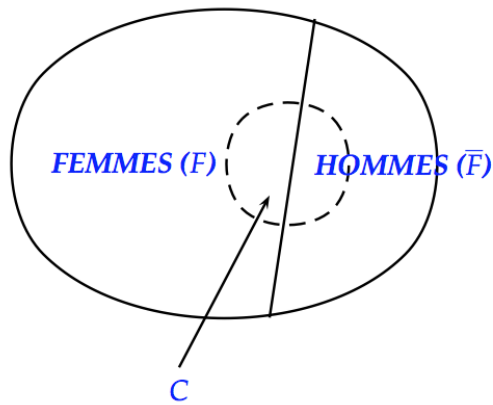
Alors... Quelle formule allons-nous appliquer ? Oui, bien sûr, la formule des probabilités totales.

Définissons les deux événements :

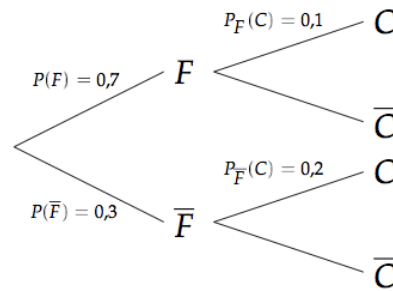
- L'événement  $F$  est "être une femme",
- L'événement  $C$  est "boire du café".

Vous l'avez compris, on cherche  $P(C)$ .

Représentons la situation pour que cela soit plus clair dans votre esprit.



Avant tout calcul, nous devons impérativement construire l'arbre pondéré.



Pas de problème pour construire cet arbre, rien de plus simple avec l'énoncé explicite.

D'après cet arbre pondéré, on peut remarquer que :

$$C = (C \cap F) \cup (C \cap \bar{F})$$

Ce qui veut dire tout simplement que l'ensemble des consommateurs de café sont les femmes qui consomment du café  $((C \cap F))$  et les hommes qui consomment du café  $((C \cap \bar{F}))$ .

Comme ce sont des événements incompatibles, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(C \cap F) + P(C \cap \bar{F}) = P(F) \times P_F(C) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(C)$$

Application numérique :

$$P(C) = 0,7 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2 = 0,13$$

Donc : la proportion des consommateurs de café est de 13%.

### III - VARIABLES ALÉATOIRES

Dans cette partie, je vais vous apprendre des formules importantes en probabilités : l'espérance, la variance et l'écart-type. Ces mots ne vous sont pas inconnus ? Normal, vous les avez déjà utilisés en statistiques.

#### 1 - DÉFINITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

On commence par la définition d'une variable aléatoire.

**Variable aléatoire :** Une **variable aléatoire** réelle est une fonction qui associe un réel à chaque événement de l'univers d'une expérience aléatoire.

## 2 - LOI DE PROBABILITÉ

Voici la loi de probabilité.

**Loi de probabilité** : Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs :

$$X(\Omega) = x_1; x_2; \dots; x_n$$

La loi de probabilité de  $X$  associe à chaque réel  $x_i$  la probabilité  $P(X = x_i)$ .

Exemple : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

L'univers est l'ensemble des 32 cartes.

On définit la variable aléatoire  $X$  : tirer un As rapporte 10, tirer une figure rapporte et tirer une autre carte ne rapporte rien.

Les valeurs prises par la variable aléatoire sont : 0 ; 1 ; 10, c'est-à-dire :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 10\}$$

On a alors :

$$\{X = 10\} = \{\text{As de } \heartsuit; \text{As de } \diamondsuit; \text{As de } \clubsuit; \text{As de } \spadesuit\}$$

$$\{X = 1\} = \{\text{toutes les figures}\}$$

$$\{X = 0\} = \{\text{toutes les cartes sauf les As et les figures}\}$$

En probabilités, cela donne :

$$P(\{X = 10\}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$P(\{X = 1\}) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

$$P(\{X = 0\}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

On représente en général une loi de probabilité dans un tableau :

$x_i$	0	1	10
$P(\{X=x_i\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

## 3 - ESPÉRANCE

Définissons l'espérance d'une variable aléatoire tout de suite.

**Espérance** : L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=0}^n x_i P(X = x_i)$$

Sans le symbole de somme, cela donne ceci :

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_n P(X = x_n)$$

Petite propriété en plus.

**Propriété de l'espérance** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

## 4 - VARIANCE

Définissons à présent la variance d'une variable aléatoire.

**Variance** : La **variance** d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$V(X) = \sum_{i=0}^n [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)$$

En fait, l'expression de la variance est celle-ci :

$$V(X) = [x_1 - E(X)]^2 P(X = x_1) + [x_2 - E(X)]^2 P(X = x_2) + \dots + [x_n - E(X)]^2 P(X = x_n)$$

Donc, avant de pouvoir calculer la variance d'une variable aléatoire, il va falloir calculer son espérance.

**Propriété de la variance** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Ca peut toujours servir...

## 5 - ECART-TYPE

Une dernière définition, celle de l'écart type en probabilités.

**Écart-type** : L'**écart-type** d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Donc, avant de pouvoir calculer l'écart-type d'une variable aléatoire, il va falloir calculer sa variance après avoir préalablement calculer son espérance.

## IV - LOI DE BERNOULLI

Voici une loi importante en probabilité et en plus très simple à comprendre vous allez voir. Je vous l'énonce tout de suite.

**Loi de Bernoulli** : Soit un réel  $p$  compris entre 0 et 1.

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles :

- **succès**, de probabilité  $p$ ,
- **échec**, de probabilité  $1 - p$ ,

Une variable aléatoire suit la **loi de Bernoulli de paramètre  $p$**  si :

- $X(\Omega) = \{0; 1\}$ ,
- $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ .

Dans le cas d'une loi de Bernoulli, on a l'espérance et la variance suivantes.

**Théorème** : Si  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , on a alors :

- $E(X) = p$ ,
- $V(X) = p(1 - p)$ ,

Tout simplement.

## V - LOI BINOMIALE

Nous allons cette fois-ci traiter la loi binomiale à travers l'exemple du lancé de dés.

Lorsque le 6 apparaît, le joueur a gagné. On appelle  $S$  cet événement.

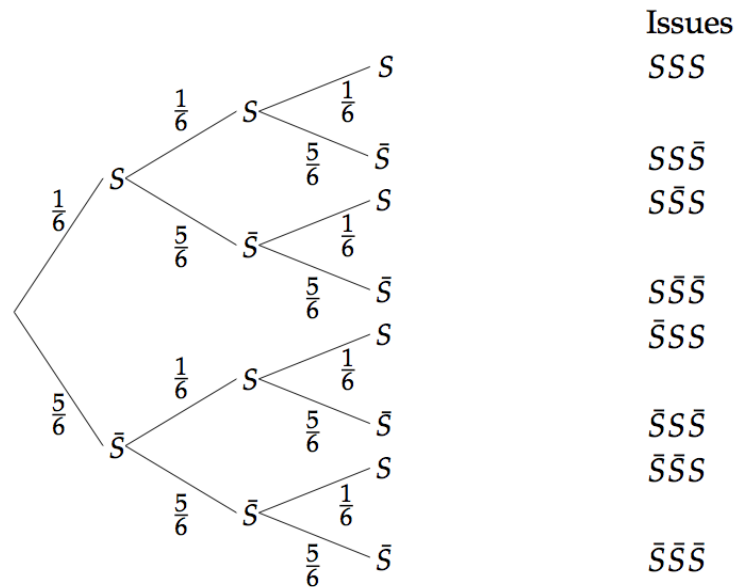
Sinon, le joueur a perdu.

Le dé est lancé trois fois par joueur.

Quelle est la probabilité de gagner une fois, deux fois, trois fois et aucune fois ?

Pour répondre à cette question, nous utiliserons un arbre construit de la façon suivante : 3 lancés donc trois niveaux. Soit, au premier lancé il gagne, soit il perd. Soit au second il gagne, soit il perd. Et ainsi de suite.

Voici l'arbre pondéré.



Appelons  $X_i$  l'événement "le joueur a obtenu  $i$  six, soit  $i$  succès".

$X_0$  est l'événement "obtenir 0 succès". Cet événement est obtenu par un seul chemin, celui tout en bas :

$$P(X_0) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

$X_1$  est l'événement "obtenir 1 succès". Cet événement est obtenu en utilisant trois chemins :

$$P(X_1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{72}$$

$X_2$  est l'événement "obtenir 2 succès". Cet événement est obtenu en utilisant trois chemins :

$$P(X_2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

$X_3$  est l'événement "obtenir 3 succès". Cet événement est obtenu par un seul chemin, celui tout en haut :

$$P(X_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

La loi de probabilité décrivant cette expérience sert appelé loi binomiale.

**Loi binomiale** : Soit un réel  $p$  compris entre 0 et 1 et  $n$  un entier naturel non nul.

Le **nombre de succès** dans la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

Une variable aléatoire suit ainsi la **loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$** , notée  $B(n; p)$ , si :

- $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ ,
- $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  :

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le nombre de possibilités de placer les  $k$  succès parmi les  $n$  répétitions est égal au coefficient :

$$\binom{n}{k}$$

Pareil que pour la loi de Bernoulli, pour la loi binomiale, il y a des simplicité dans les calculs de l'espérance et de la variance.

**Théorème** : Si  $X$  suit la loi de binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , on a alors :

- $E(X) = np$ ,
- $V(X) = np(1 - p)$ ,

Voilà, nous avons fini ce chapitre sur le conditionnement. Vous pouvez passer aux exercices, QCM interactifs ou aux annales pour vous préparer au Baccalauréat.