Suites numériques

Nous avions déjà étudier les suites numériques l'an passé. Nous allons quand même tout revoir pour que vous n'ayez aucun soucis.

I - Définition suite numérique

Qu'es-ce qu'une suite numérique ? Commençons par cela.

Définition : Soient $a \in \mathbb{N}$ et $I_a = \{n \in \mathbb{N}, n \geqslant a\}$, I_a est en fait l'ensemble des entiers naturels à partir de a.
On appelle **suite numérique** la fonction u de I_a dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I_a & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array} \right.$$

Notation : On notera $u(0)$ u_0, $u(1)$ u_1, etc.
u_n s'appelle **terme** de la suite numérique.

II - Modes de définitions d'une suite numérique

1 - Mode explicite

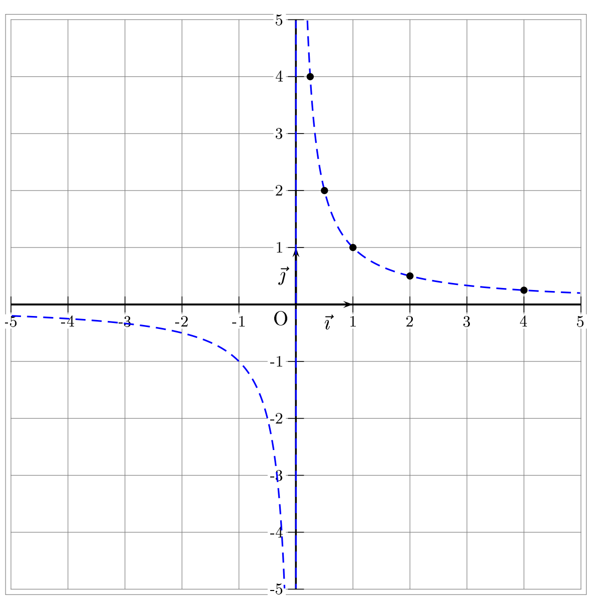
Il y a plusieurs façons de définir une suite numérique. C'est ce que nous allons voir dans cette section en commençant par le mode explicite à l'aide de fonction.

Mode explicite : Le terme général de la suite est exprimé en fonction de n :

$$u_n = f(n)$$

On remplace tout simplement le x de la fonction par le n de la suite.

Exemple : Si on veut représenter la suite u_n telle que $u_n = \frac{1}{n}$, cela ne sera rien d'autre que la fonction inverse **prises aux abscisses entiers naturels**.



Remarque importante : Une suite numérique est définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Donc, si l'on représente une suite sur un graphique, on n'aura que des abscisses naturels et des ordonnées réels. N'oubliez jamais cela. C'est une cause très fréquente d'erreur.

2 - Mode récurrent

Le mode récurrent est plus utilisés pour les suites numériques.

Mode récurrent : Une suite numérique est définie par la donnée de son premier terme et d'un procédé qui permet de déterminer les suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ u_0 & & \end{array}\right.$$

On utilise le terme u_0 pour calculer u_1, le terme u_1 pour calculer u_2, etc.
Regardez l'exemple qui suit.

Exemple : Déterminer les cinq premiers termes de la suite numérique suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 3 \\ u_0 & = & 2 \end{array}\right.$$

Nous avons déjà u_0 qui vaut 2. Utilisons-le pour déterminer u_1 en utilisant la première ligne comme ceci :

$$u_1 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$$

Facile, non ? Continuons ainsi pour les autres termes.

$$u_2 = u_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$u_3 = u_2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$u_4 = u_3 + 3 = 11 + 3 = 14$$

Nous avons terminé.

Nous avons donc toujours besoin du terme $(n-1)$ pour calculer le terme n ?
Oui. Mais ne vous en faites pas, on ne vous demandera jamais de calculer le u_{1000} sans vous faciliter la tache.

Nous pouvons aussi déterminer les termes de la suites graphiquement. Regardez l'exemple suivant.

Exemple : Déterminons graphiquement les quatre premiers termes de la suite numérique définie par :

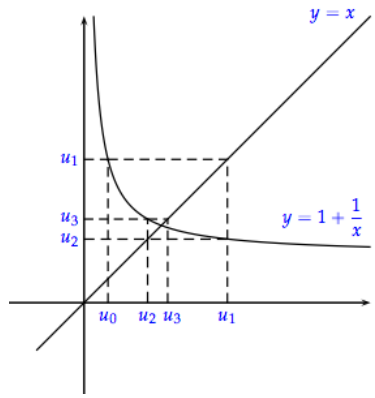
$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 1 + \frac{1}{u_n} \\ u_0 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.
Traçons les courbes de f et la courbe d'équation $y = x$ dans un même graphique.

On représente $u_0 = \frac{1}{2}$ sur l'axe des abscisses.
On remonte à partir de l'abscisse u_0 jusqu'à toucher la courbe. L'ordonnée du point d'intersection obtenu est noté u_1.

Maintenant, soyez attentif, nous allons tracer un trait horizontal à partir de l'ordonnée u_1 jusqu'à toucher la courbe d'équation $y = x$. L'abscisse de ce point d'intersection est u_1.
On fera ainsi pour trouver tous les termes de la suite numérique.

Je résume tout ça sur la courbe qui suit.



III - Suite arithmétique

On peut classer les suites numériques en fonction de l'évolution de leur terme.
Voici une définition des suites dites **arithmétiques**.

Définition : On appelle **suite arithmétique** de premier terme u_0 et de **raison** r la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + r \\ u_0 & & \end{cases}$$

Qu'es-ce que cela veut dire concrètement ?
Je prend un exemple pour vous l'expliquer.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + 5 \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Cette suite est une suite arithmétique de raison 5.
Si l'on calcule les cinq premiers termes de cette suite,

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = u_0 + 5 = 1 + 5 = 6$$

$$u_2 = u_1 + 5 = 6 + 5 = 11$$

$$u_3 = u_2 + 3 = 11 + 5 = 16$$

$$u_4 = u_3 + 3 = 16 + 5 = 21$$

Que remarquez-vous ?
La différence de deux termes consécutifs est constante et égale à la raison 5. On augmente de 5 à chaque u_n suivant.

Ah, donc avec des suites arithmétiques nous allons pouvoir calculer le terme u_{1000} sans avoir à calculer les 1000 termes précédents ?
OUI ! On peut le faite en utilisant seulement le u_0 ou tout simplement, en prenant un autre terme de votre choix.

Propriétés :
– Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

– Si u est une suite arithmétique, alors pour tout $n \geqslant p$,

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Dans l'exemple précédent, en utilisant la première formule, vous pouvez trouver le u_4 par exemple :

$$u_4 = u_0 + 4 \times 5 = 1 + 20 = 21$$

Ou en utilisant la deuxième :

$$u_4 = u_2 + (4-2) \times 5 = 11 + 2 \times 5 = 11 + 10 = 21$$

On vous demandera souvent de calculer la somme des termes d'une suite arithmétique.
Leur somme ? Et comment je fais ça moi ?
Ne paniquer pas, il y a une formule pour ça.

Propriété : Soit u une suite arithmétique.
La somme des termes de cette suite est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Vous pouvez réutilisez directement cette formule. Néanmoins, il faut bien que vous la compreniez.

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Le symbole

$$\sum_{n=0}^{n} u_n$$

signifie la somme de 0 à n de u_n, c'est-à-dire $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
La quantité $(n+1)$ signifie le nombre de terme (oui, tous les termes + le terme d'indice 0, ça fait $n+1$).
Le u_0 est le premier terme et u_n est le dernier.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 4 \; u_0 \\ & = & 3 \end{array} \right.$$

Cette suite est arithmétique de raison 4.
Calculons la somme des 100 premiers termes de cette suite.

$$\sum_{n=0}^{100} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} = \frac{(100+1)(u_0 + u_{100})}{2} = \frac{(100+1)(3 + u_{100})}{2}$$

Il va falloir calculer le dernier terme voulu, soit u_{100}. Aucun problème pour cela, on a la formule.

$$u_{100} = u_0 + 100 \times 4 = 3 + 400 = 403$$

Revenons à la formule de somme et concluons :

$$\sum_{n=0}^{100} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} = \frac{(100+1)(3 + u_{100})}{2} = \frac{(101)(3+403)}{2} = \frac{(101)(406)}{2} = \frac{41006}{2} = 20503$$

On peux vous demander de calculer la somme de tous les termes de la suite u_n en fonction de n. C'est pareil, sauf qu'on laisse le n tel quel.

IV - Suite géométrique

1 - Définitions et propriétés

Une autre catégorie de suite à présent, les suites dites **géométriques**.

Définition : On appelle **suite géométrique** de premier terme u_0 et de **raison** q la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & q u_n \\ u_0 & & \end{array} \right.$$

Puis-je avoir une définition concrète pour cette catégorie de suite aussi s'il-vous-plaît ?
Si c'est demander si poliment.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n \\ u_0 & = & 4 \end{array}\right.$$

Cette suite est une suite géométrique de raison 2.
Si l'on calcule les cinq premiers termes de cette suite,

$$u_0 = 4$$

$$u_1 = 2 \times u_0 = 2 \times 4 = 8$$

$$u_2 = 2 \times u_1 = 2 \times 8 = 16$$

$$u_3 = 2 \times u_2 = 2 \times 16 = 32$$

$$u_4 = 2 \times u_3 = 2 \times 32 = 64$$

Que remarquez-vous ici ?
Le quotient de deux termes consécutifs est constant et égal à la raison 2. On multiplie de 2 à chaque u_n suivant.

Il existe aussi des propriétés pour calculer le 1000^{me} terme sans passer par les 1000 premiers.

Propriétés :
– Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors :

$$u_n = u_0 q^n$$

– Si u est une suite géométrique, alors pour tout $n \geqslant p$,

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Dans l'exemple précédent, en utilisant la première formule, vous pouvez trouver le u_4 par exemple :

$$u_4 = u_0 \times 2^4 = 4 \times 16 = 64$$

Ou en utilisant la deuxième :

$$u_4 = u_2 \times 2^{4-2} = 16 \times 2^2 = 16 \times 4 = 64$$

Il y a également une formule pour calculer la somme de tous les termes d'une suite géométrique. La voici.

Propriété : Soit u une suite géométrique.
La somme des termes de cette suite est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Vous pouvez aussi réutilisez directement cette formule. Mais il faut que vous la compreniez aussi bien que la précédente pour les suites arithmétiques.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \frac{1}{3}u_n \\ u_0 & = & 2 \end{array}\right.$$

Cette suite est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
Calculons la somme des 100 premiers termes de cette suite.

$$\sum_{n=0}^{100} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \times \frac{1-\frac{1}{3}^{100+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\sum_{n=0}^{100} u_n = 2 \times \frac{1-\frac{1}{3}^{101}}{\frac{2}{3}} = 2 \times (1-\frac{1}{3}^{101}) \times \frac{3}{2} = 3 \times (1-\frac{1}{3}^{101}) = 3 \times 1 = 3$$

La quantité $\frac{1}{3}^{101}$ est tellement réduite que $1 - \frac{1}{3}^{101} \simeq 1$.
On peux vous demander de calculer la somme de tous les termes de la suite u_n en fonction de n. C'est pareil, sauf qu'on laisse le n tel quel.

Remarque : On peut vous demander de montrer qu'une suite v_n définie en fonction d'une autre suite (u_n) est géométrique.
Dans ce cas, Il suffit de montrer qu'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que $v_{n+1} = qv_n$.
Je vais vous donner un exemple pour vous montrer les directives à suivre.

Exemple : Soit la suite numérique u_n définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - 3 \\ u_0 &= 1 \end{cases}$$

Nous allons montrer que la suite $v_n = u_n - 3$ est géométrique.
Il suffit donc de montrer qu'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que $v_{n+1} = qv_n$.
On part toujours de v_{n+1},

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$

On a utilisé la formule $v_n = u_n - 1$ et remplacé les n par des $n+1$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6$$

Or :

$$v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n = v_n + 3$$

Donc :

$$v_{n+1} = 2u_n - 6 = 2(v_n + 3) - 6 = 2v_n + 6 - 6 = 2v_n$$

Conclusion : v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

On peut alors écrire la chose suivante :

$$v_n = (-2) \times 2^n$$

2 - Limite

Avant de finir avec les suites géométriques, voici un moyen facile de calculer leur comportement à l'infini.
Vous allez être amené à déterminer le comportement d'une suite lorsque le n sera grand, quand il tend vers l'infini. C'est la notion de **limite** oui, comme pour les fonctions, sauf qu'ici, le n ne peut tendre que vers l'infini.
Soit une suite **converge** vers un réel, soit elle **diverge**.
Attention : une suite peut être si convergente, ni divergente.
Je vais vous donner un théorème très puissant pour le déterminer, dans le cas des suites géométriques.

Théorème : Soit $q \in \mathbb{R} - \{0;1\}$ (un réel non nul et différent de 1).

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0,
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$,
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge vers 1,
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Ce théorème est très explicite. Pas besoin donc de donner un exemple.

V - Propriétés d'une suite

1 - Variations

Comme les fonctions, les suites ont des variations.

Définitions : Soit u_n une suite numérique.

- La suite (u_n) est dite **croissante** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$$
- La suite (u_n) est dite **strictement croissante** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$
- La suite (u_n) est dite **décroissante** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$$
- La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$$
- La suite (u_n) est dite **stationnaire** si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$$

Le symbole $\forall$ signifie "pour tout".

Remarque : Pour une suite numérique, on ne dit pas "constante" mais "stationnaire".

Point méthode : Pour déterminer les variations d'une suite numérique, on calcule la quantité $u_{n+1} - u_n$,

- Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante,
- Si $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante,
- Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite (u_n) est décroissante,
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante,
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$, la suite (u_n) est stationnaire.

Exemple : La suite numérique u_n définie par : $u_n = n^2$ est croissante.
En effet :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n2 = 2n + 1 \geqslant 0$$

Car n est un naturel.
Donc la suite u_n est croissante.

Remarque : Une suite n'est pas forcément croissante ou décroissante. Parfois, elle peuvent être ni croissante, ni décroissante. Un exemple type est la suite $u_n = (-1)^n$.

2 - Extremum

Qui dit variations, dit extremum.

Définitions : Soit u_n une suite numérique.

- La suite (u_n) est **majorée** si :
$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$
M est appelé le **majorant**.

- La suite (u_n) est **minorée** si :
$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$
m est appelé le **minorant**.

- Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Le symbole $\exists$ signifie "il existe" et le symbole / signifie "tel que".

Les notions de majoration et de minoration pour les suites numériques sont les mêmes qui pour les fonctions.