Produit scalaire dans l'espace

L'année dernière, nous avions vu le produit scalaire dans un espace de deux dimensions. Nous allons généraliser cette notion dans l'espace à trois dimension.
Je vais d'abord commencer par vous rappeler toutes les notions vues en première afin que tout soit fait frais dans votre tête.

www.mathsbook.fr

I - Rappels de première - Produit scalaire dans le plan

1 - Définitions

Toute cette section est censé être des rappels.

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un **réel**, que l'on note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, défini par :
– Si $\overrightarrow{u} \neq 0$ et $\overrightarrow{v} \neq 0$:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont nuls :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$

La notation $||\overrightarrow{u}||$ signifie la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.
En réalité, ce n'est que le produit de la norme de $\overrightarrow{u}$ et de la norme de $\overrightarrow{v}$ que l'on multiplie par le cosinus de l'angle formé par ces deux vecteurs.
Si les deux vecteurs sont nuls, biensur leurs normes sont nulles, et donc leur produit scalaire aussi.

Remarque : On peut faire le produit scalaire avec un seul vecteur : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ se note $\overrightarrow{u}^2$ et est appelé **carré scalaire**.

Exemple : Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ avec :
$||\overrightarrow{u}|| = 3$, $||\overrightarrow{v}|| = 4$ et l'angle formé par ces deux vecteurs vaut $\frac{\pi}{6}$ soit 30°.
Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 3 \times 4 \times \cos(\frac{\pi}{6})$$

Or, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tout le monde le sait.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3 \times 4 \times \cos(\frac{\pi}{6}) = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

Le produit scalaire, comme je vous l'ai dit en introduction, permet de démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs.

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Cela se voit très bien regardez.

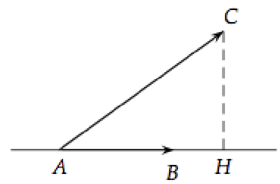
Démonstration : Si le produit scalaire est nul, c'est soit que la norme de $\overrightarrow{u}$ est nulle, soit que celle de $\overrightarrow{v}$ est nulle, soit que le cosinus de l'angle formé par ces deux vecteurs est nul.
Or, si les normes des deux vecteurs étaient nulles, les vecteurs seraient forcément nul.
Donc, cela ne peut qu'être le cosinus qui soit nul.

$$cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0 \Longleftrightarrow (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Mais un angle de $\frac{\pi}{2}$, c'est un angle droit !
Terminé.

Quand on fait le produit scalaire de deux vecteurs, c'est en fait une projection orthogonale de l'un sur l'autre.

Propriété : Soient A, B et C trois points distincts du pal, et H le projeté orthogonal de C sur (AB).



– Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

– Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

Tout est très clair, je n'ai rien à ajouter là dessus.
Passons à présent aux propriétés relatives au produit scalaire.

2 - Propriétés du produit scalaire

Elles sont nombreuses, et doivent toutes être comprises et connues par coeur.

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées (x', y') dans la base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

On additionne les produits des coordonnées deux à deux.

Exemple : Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(3, -4)$ et $\overrightarrow{v}(0, 3)$.
Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3 \times 0 + (-4) \times 3 = -12$$

Et maintenant, avec un réel.

Propriétés : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et λ un réel.
On a les relation suivantes :
– Commutativité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$$

– Distribution :

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$

– Multiplication par un réel :

$$\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$$

Tout cela paraissait évident, non ?

Alors continuons avec ces évidences.

Identités remarquables : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On a les relations suivantes :

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$$
$$(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$$
$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2$$
$$||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2=||\overrightarrow{u}||^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+||\overrightarrow{v}||^2$$
$$||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2=||\overrightarrow{u}||^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+||\overrightarrow{v}||^2$$

Ce ne sont que des vulgaires identités remarquables. Rien de plus, rien de moins.

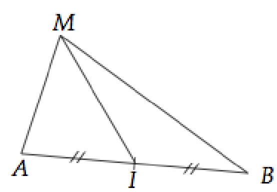
Allez maintenant, appliquons tout cela !

3 - Applications

Plusieurs théorèmes célèbres sont issus de ce produit scalaire. Et oui, on ne fait rien qui ne sert à rien !

a - Théorème de la médiane

Théorème de la médiane : Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.



Pour tout point M du plan, on a les relations suivantes :

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

$$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2$$

Exemple : Calculer la longueur de la médiane du triangle ABM issue de M tel que $AB=4$, $AM=3$ et $BM=7$.

Rien de plus simple, on applique tout bêtement.

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

$$2MI^2=MA^2+MB^2-\frac{1}{2}AB^2$$

$$2MI^2=3^2+7^2+\frac{1}{2}\times 4^2=66$$

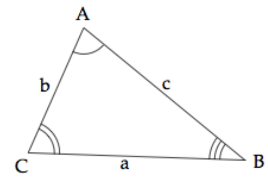
$$MI^2=33$$

$$MI=\sqrt{33}$$

b - Thorème d'Al Kashi

Vous connaissiez Pythagore en 4ème, mais son théorème n'est qu'un cas particulier de celui d'Al Kashi que je vais vous montrer tout de suite.

Théorème D'Al Kashi : Soit un triangle ABC avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.



On a les relations suivantes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\widehat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$$

Rappelez-vous, pour appliquer le théorème de Pythagore, il nous faut un triangle rectangle, soit un angle droit, un angle de $\frac{\pi}{2}$.
Et le cosinus d'un angle droit vous combien ? Il est nul.
Donc, si l'angle droit est en A, les formules se transforment en :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

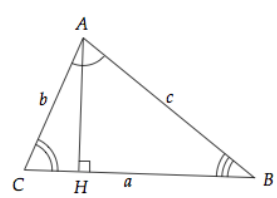
C'est le théorème de notre cher Pythagore, oui.

Grâce à ce théorème, en particulier, vous saurez calculer tous les angles d'un triangle en ayant juste la longueur de ces côtés. Tiens ! Faites-le.

c - Formule des sinus

Après les cosinus, les sinus ! Le produit scalaire nous donne des propriétés sur les sinus.

Formule des sinus : Soit un triangle ABC d'aire $\mathcal{A}$ avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.



On a les relations suivantes :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$$

Un nouvelle façon de calculer l'aire d'un triangle sans utilisée la base et la hauteur.

Exemple : Soit un triangle ABC construit comme dans la définition précédente, avec $BC = a = 12$, $\widehat{A} = 30^\circ$ et $\widehat{B} = 60^\circ$.
Calculer le côté $[AC]$.

Pour trouver b, on utilise la relation :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}}$$
$$b = \frac{a \times \sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}$$

Or,

$$\sin\widehat{B} = \sin(60^\circ) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \widehat{A} = \sin(30^\circ) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$b = \frac{a \times \sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}} = \frac{12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 12\sqrt{3}$$

d - Distance d'un point à une droite

Je vais vous apprendre à calculer la distance d'un point du plan à une droite.

Propriété : Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec a et b non nuls, et $A(x_A; y_A)$ un point du plan.
La distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est la distance AH, avec H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
On a :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

C'est la fractions avec au numérateur les coordonnées du point A dans l'équation de la droite $\mathcal{D}$, et au dénominateur les coefficient a et b de l'équation de la drotie $\mathcal{D}$ élevés au carré sous la racine.
N'ayez pas peur des valeurs absolues au numérateur, elle sont là pour que le tout soit positif, car une distance est toujours positive.

Exemple : Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $4x + 5y - 1 = 0$ et $A(4; 0)$ un point du plan.

La distance de A à $\mathcal{D}$ est donc la distance AH, avec H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 \times 4 + 5 \times 0 - 1|}{\sqrt{4^2 + 0^2}} = \frac{15}{4}$$

e - Equations

Deux propriétés sur les équations et l'on aura terminé pour ce chapitre.

Propriété équations :
– La droite orthogonale à $\vec{n}$ passant par A est :

$$\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0\}$$

– Le cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0\}$$

Le premier ensemble fait référence à la définition du produit scalaire suivante : si le produit scalaire de deux vecteurs est nul alors ces vecteurs sont orthogonaux.

La seconde fait référence à un triangle dans un cercle dont l'un des côtés est diamètre de ce cercle, ce triangle est forcément rectangle. Et bien ici, si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, cela signifie que le segment $[AB]$ est diamètre d'un cercle.

II - Produit scalaire dans l'espace

1 - Définitions

Nous attaquons maintenant la partie dans l'espace. Vous allez voir, c'est presque pareil, à un axe prés.

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace n'est rien d'autre que le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan contenant ces deux vecteurs.

Prenons un point A de l'espace. Il existe donc deux points, B et C, tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe forcément un plans qui contient les points A, B et C puisqu'un plan est formé par trois points distincts.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace est donc le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan contenant ces deux vecteurs.

Pour les coordonnées des vecteurs, c'est pareil que dans le plan, à ça prés.

Définition : Soient $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace.
On a alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exemple : Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(3;-1;0)$ et $\overrightarrow{v}(-2;1;5)$ dans l'espace.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3 \times (-2) + (-1) \times 1 + 0 \times 5 = -6 - 1 + 0 = -7$$

Et si ce produit scalaire est nul, on a aussi des vecteurs orthogonaux dans l'espace ?

Alors, oui. J'y reviens juste après ça. Ne bougez pas.

2 - Propriétés

Les propriétés du produit scalaires dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

3 - Orthogonalité

Nous allons maintenant parler d'orthogonalité dans l'espace.

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Soit un vecteur $\overrightarrow{n}$ de l'espace et un point A.
L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est un plan passant par A et de vecteurs normal $\overrightarrow{n}$.

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont perpendiculaires si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 0$.

Si on a une droite, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un plan $\mathcal{P}$, alors le vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal à ce plan s'il est perpendiculaire à toutes les droites contenues dans le plan.

Exemple : Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}(-5;0;2)$ et $\overrightarrow{n}'(-2;6;-5)$ sont perpendiculaires.

En effet, calculons le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = (-5) \times (-2) + 0 \times 6 + 2 \times (-5) = 10 + 0 - 10 = 0$$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont orthogonaux, et donc les plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2;3;1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-2;1;3)$.

Pour tout point $M(x;y;z)$ de l'espace,

$$M \in \mathcal{P} \iff (\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff -2(x-2) + (y-3) + 3(z-1) = 0 \iff -2x + y + 3z - 2 = 0$$

Donc, l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2;3;1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-2;1;3)$ est : $-2x + y + 3z - 2 = 0$.

4 - Applications

a - Equation cartésienne

On va définir l'équation cartésienne d'un plan.

Définition : Tout plan de l'espace, de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, toute équations de la forme $ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan de l'espace de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.

Exemple : Le vecteur directeur du plan, d'équation cartésienne $3x-4z=2$, est le vecteur $\overrightarrow{n}(3;0;-4)$.

b - Distance d'un point à un plan

On va parler maintenant de distance d'un point à un plan.

Propriété : Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace.
La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est la distance AH, avec H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.
On a :

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

C'est la même formule que dans le plan, en rajoutant un axe, l'axe z.
Exemple : Soient $\mathcal{P}$ le pan d'équation $-x+2y+5z+2=0$ et $A(5;2;-1)$ un point de l'espace.

La distance de A à $\mathcal{P}$ est donc la distance AH, avec H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|(-1)\times5+2\times2+5\times(-1)+2|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+5^2}}=\frac{|-5+4-5+2|}{\sqrt{1+4+25}}=\frac{|-4|}{\sqrt{30}}=\frac{4}{\sqrt{30}}$$