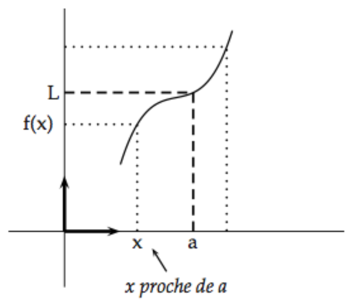
# Dérivation

www.mathsbook.fr

## I - Limite d'une fonction en $a$

**Définition** : On dit que $f$ tend vers L quand $x$ tend vers $a$ si la distance de $f(x)$ à L peut être rendu aussi petite que l'on veut dés lors que $x$ est suffisamment proche de $a$.
Ceci se note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$




**Théorème** : Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I - \{a\}$ ($I$ privée de $a$) et $g$ une fonction définie sur $I$.
Si $g$ admet une limite en $a$ et si pour tout $x \neq a$ on a $f(x) = g(x)$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$.

## II - Dérivée d'une fonction

### 1 - Nombre dérivée d'une fonction en $a$

**Définition** : Soit $f$ une fonction définie en $a$ et $h \in \mathbb{R}$.
La fonction $f$ est **dérivable** en $a$ s'il existe un nombre $D$ appartenant à $\mathbb{R}$ tel que :

$$D = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ce nombre $D$, s'il existe, est appelé **nombre dérivé** de $f$ en $a$ et on le note :

$$D = f'(a)$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \overset{x=a+h}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

### 2 - Fonction dérivée

**Définition** : Soit $f$ une fonction dérivable et définie sur un intervalle $I$.
On appelle **fonction dérivée** la fonction qui à chaque réel $x$ de $I$ associe son nombre dérivée.
On la note $f'$ :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

### 3 - Dérivées usuelles

| Fonction | Dérivée |
| --- | --- |
| $k$ $(k \in \mathbb{R})$ | $0$ |
| $x^n$ $(n \in \mathbb{N}*)$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\frac{1}{x^n}$ $(x \neq 0$ $n \in \mathbb{N}^*)$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $\sqrt{x}$ $(x > 0)$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |

### 4 - Opérations sur les dérivées

**Opérations sur les dérivées** : Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables et définies sur un même intervalle $I$ et $k$ un réel.

- $u+v$ est dérivable sur $I$ et $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$,
- $u \times v$ est dérivable sur $I$ et $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
- $k \times u$ est dérivable sur $I$ et $(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$,
- Si $v$ ne s'annule pas sur $I$, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $I$ et $(\frac{u}{v})'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$,

### 5 - Variations

**Théorème** : Soit $f$ une fonction dérivable et définie sur un intervalle $I$.

- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors $f$ est constante sur $I$,
- Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors $f$ est croissante sur $I$,
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $f$ est strictement croissante sur $I$,
- Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors $f$ est décroissante sur $I$,
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

### 6 - Extremum

**Propriétés** :

- Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$.
  Si $f$ admet un extremum local en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.
- Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $x_0 \in I$.
  Si la fonction dérivée $f'(x_0)$ s'annule en $x_0$ en changeant de signe, alors $f$ admet un extremum local en $x_0$.

## III - Approximation affine et tangente à la courbe en un point

**Propriété** : Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f(x) = (x-a)f'(a) + f(a) + (x-a)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.
On appelle **approximation affine** de $f$ : $f(x) = (x-a)f'(a) + f(a)$

Le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point $M_0$ d'abscisse $x_0$ est $f'(x_0)$.

**Définition** : L'équation de la droite tangente à la courbe au point $M_0$ d'abscisse $x_0$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$