Généralités sur les fonctions

www.mathsbook.fr

I - Rappels

Définitions : Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction.

Définir une fonction f de D sur $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un réel unique noté $f(x)$.

On appelle **ensemble de définition** (ou domaine de définition) l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction f existe.

On appelle **image** de x par f le nombre $f(x)$.

On appelle **antécédent** de y le nombre x telle que $f(x) = y$.

Le **tableau de valeurs** d'une fonction f regroupe les coordonnées d'un certain nombre de points de la courbe à intervalles réguliers.

On appelle **pas** l'écart régulier entre deux valeurs successives de x.

La représentation graphique (ou la courbe représentative) de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x appartient à D ($x \in D$).

II - Sens de variation

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D et I un intervalle de D.

- f est **croissante** sur I si et seulement si pour tout x_1, $x_2 \in I$, tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,
- f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tout x_1, $x_2 \in I$, tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,
- f est **constante** sur I si et seulement si il existe un $k \in \mathbb{R}$ (un réel k) tel que pour tout réel x de I on $f(x) = k$.

III - Maximum et minimum

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D et I un intervalle de D et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geqslant f(a)$,
- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f est **majorée** par le réel M sur D si pour tout réel x de D, $f(x) \leqslant M$,
- On dit que f est **minorée** par le réel m sur D si pour tout réel x de D, $f(x) \geqslant m$,
- Une fonction majorée et minorée sur D est **bornée**.

IV - Parité et périodicité

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D.
La fonction f est **paire** si pour tout éléments x de D, $f(-x) = f(x)$ (avec $-x$).

Sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D.
La fonction f est **impaire** si pour tout éléments x de D, $f(-x) = -f(x)$. (avec $-x$)

Sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D.
La fonction f est **périodique** si pour tout éléments x de D, $f(x+T) = f(x)$.

Sa courbe représentative est invariante par toute translation de vecteur $nT\vec{i}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $\vec{i}$ le vecteur dirigeant l'axe des abscisses.

V - Fonctions usuelles

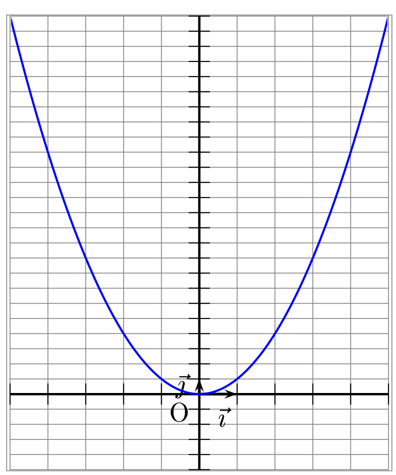
Définition : La **fonction carrée** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

La fonction carrée est une fonction paire. Donc, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Elle est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

La courbe représentative de la fonction carrée est une **parabole**.

Voici sa représentation graphique :

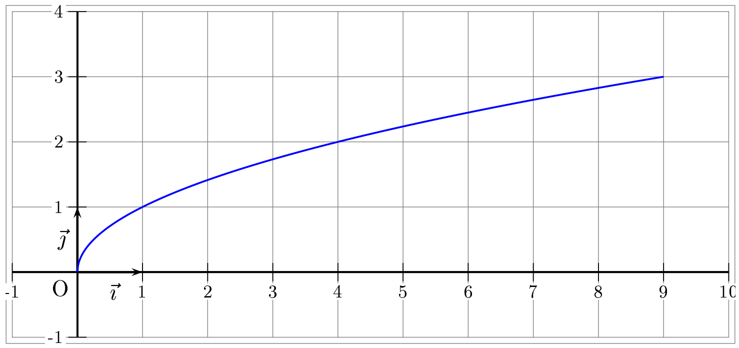


Définition : La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

La fonction racine carrée est une strictement positif.

Elle est croissante sur $[0;+\infty[$.

La courbe représentative de la fonction racine carrée la suivante.

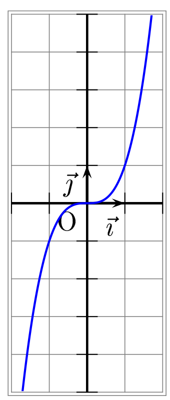


Définition : La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

La fonction cube est une fonction impaire. Donc, ayant pour centre de symétrique l'origine du repère.

Elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Voici sa représentation graphique :



Définition : La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (appelé aussi $\mathbb{R}^+$) par $f(x) = \frac{1}{x}$.

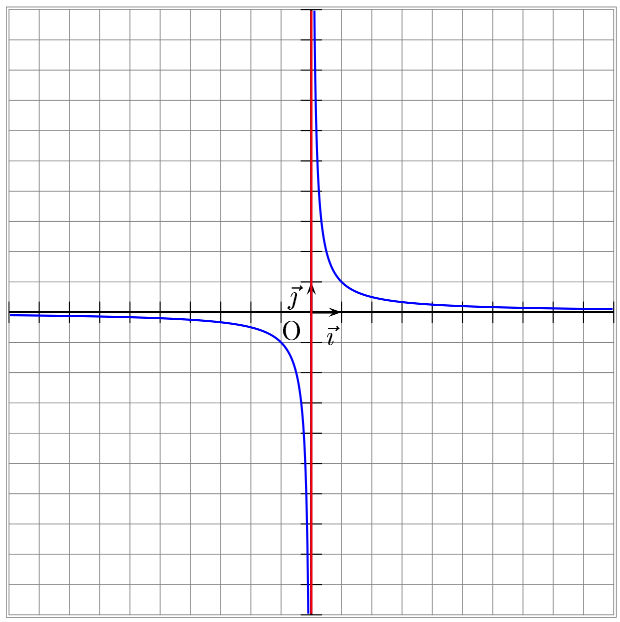
La fonction inverse est une fonction impaire. Donc, son centre de symétrie est l'origine du repère.

Elle est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

La courbe représentative de la fonction carrée est une **hyperbole**.

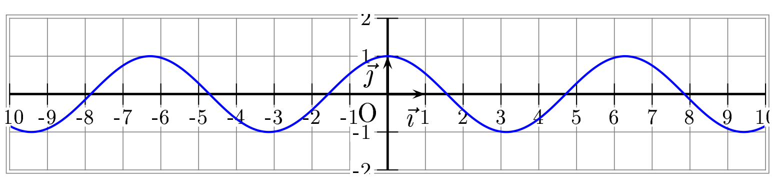
Elle possède une **asymptote verticale** en $x = 0$ et une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$. En effet, 0 est une valeur interdite (donc asymptote verticale), et elle ne peut pas être nulle (donc asymptote horizontale).

Voici sa représentation graphique :

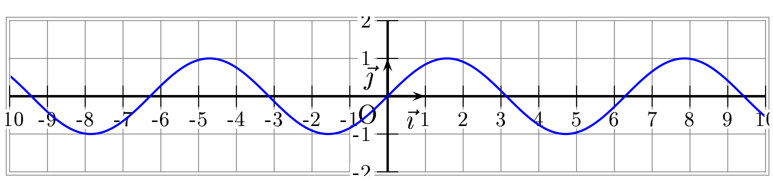


Définitions :

- La **fonction cosinus** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$.
  C'est une fonction paire et **périodique** de période 2π, c'est-à-dire qu'elle se répète tous les 2π.
  Elle est croissante sur $[-\pi; 0]$ et décroissante sur $[0; \pi]$.
  La courbe représentative de la fonction cosinus est une **sinusoïde**.



- La **fonction sinus** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.
  C'est une fonction impaire et **périodique** de période 2π.
  Elle est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.
  La courbe représentative de la fonction sinus est une **sinusoïde**.



VI - Opérations sur les fonctions

Définition : Soient f et g deux fonctions définie sur I.
La fonction $f+g$ est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

La courbe représentative de cette fonction se déduit point par point à partir de la courbe de f en ajoutant les ordonnées.

Propriétés : Soient f et g deux fonctions définie sur I.

- Si f et g sont deux fonctions croissantes, alors la fonction $f+g$ est aussi une fonction croissante,
- Si f et g sont deux fonctions décroissantes, alors la fonction $f+g$ est aussi une fonction décroissante.

Définition : Soit f une fonction définie sur I et $k \in \mathbb{R}$.
La fonction kf est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$(kf)(x) = k \times f(x)$$

La courbe représentative de cette fonction se déduit point par point à partir de la courbe de f en multipliant l'ordonnée $f(x)$ par k.

Propriétés : Soit f une fonction définie sur I et $k \in \mathbb{R}$.

- Si $k > 0$, alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation,
- Si $k < 0$, alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés.

Définition : Soient f et g deux fonctions définie sur I.
La fonction $f \times g$ est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

Définition : Soient f et g deux fonctions définie sur I, tel que $g(x) \neq 0$ pour tout réel x.
La fonction $\frac{f}{g}$ est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Définition : Soient f une fonction définie sur I et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.
La fonction $g \circ f$ (on dit "g rond f")est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Propriétés : Soient f une fonction définie sur I et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.

- Si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$est croissante,
- Si f et g ont des sens de variation opposés, alors, $g \circ f$est décroissante.

VII - Transformations

Soit la fonction $f(x)$ et $k \in \mathbb{R}$.

Quel sera le signe de $f(x) + k$?

- Si $k > 0$, alors la fonction $f(x) + k$ sera la fonction f déplacée vers le haut de k unités,

- Si $k < 0$, alors la fonction $f(x) + k$ sera la fonction f déplacée vers le bas de k unités,

Quel sera le signe de $f(x + k)$?

- Si $k > 0$, alors la fonction $f(x + k)$ sera la fonction f déplacée vers la gauche de k unités,
- Si $k < 0$, alors la fonction $f(x + k)$ sera la fonction f déplacée vers la droite de k unités,