

# LIMITES DE SUITES NUMÉRIQUES

[www.mathsbook.fr](http://www.mathsbook.fr)

## I - CONVERGENCE ET DIVERGENCE DE SUITES

### Définitions :

- On dit qu'une suite  $(u_n)$  **converge** vers un réel  $L$  si pour tout intervalle ouvert  $U$  contenant  $L$ , tous les termes de la suite appartiennent à  $U$  sauf un nombre fini.

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

$L$  est la limite de la suite  $(u_n)$  et elle est unique.

- Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente.

**Propriété** : Une suite  $(u_n)$  converge vers  $L$  revient à dire que la suite  $(u_n - L)$  converge vers 0.

## II - THÉORÈMES DE COMPARAISON

### 1 - THÉORÈME DES GENDARMES

**Théorème des gendarmes** : Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites numériques telles que  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers  $L$ .

Si  $u_n \leq v_n \leq w_n$  à partir d'un certain rang, alors la suite  $(v_n)$  converge vers  $L$ .

Si à partir d'un certain rang on a  $|u_n - L| \leq v_n$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $L$ .

### 2 - CRITÈRE DE DIVERGENCE

**Critère de divergence** : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ ,
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

## III - OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES

**Propriétés** : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques convergentes de limites respectives  $L$  et  $L'$ .

- La suite  $(u_n + v_n)$  est convergente et sa limite est égale à  $L + L'$ ,
- La suite  $(u_n v_n)$  est convergente et sa limite est égale à  $LL'$ ,
- Si  $L' \neq 0$ , la suite  $\frac{u_n}{v_n}$  est convergente et sa limite est égale à  $\frac{L}{L'}$ ,

## IV - LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

**Propriétés** : Soient  $f$  une fonction définie sur  $]a; +\infty[$  et  $(u_n) = f(n)$  une suite définie à partir de  $n > a$ .

Si  $f$  admet en  $+\infty$  une limite finie, ou infinie, alors la suite  $(u_n)$  admet la même limite.

## V - CAS DES SUITES GÉOMÉTRIQUES

**Théorème** : Soit  $q \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$  (un réel non nul et différent de 1).

- Si  $-1 < q < 1$ , alors la suite  $(q^n)$  converge vers 0,
- Si  $q > 1$ , alors la suite  $(q^n)$  diverge vers  $+\infty$ ,
- Si  $q = 1$ , alors la suite  $(q^n)$  converge vers 1,
- Si  $q \leq -1$ , alors la suite  $(q^n)$  n'a pas de limite.