Polynôme du second degré

www.mathsbook.fr

I - Généralités sur les polynômes

Définitions : Un **polynôme** non nul de degré n est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

Avec $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels et $a_n \neq 0$.

On dit que α est **racine** du polynôme P si : $P(\alpha) = 0$.

Théorème : Soit P un polynôme non nul de degré n et α un réel.
Si α est racine du polynôme P, alors il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$$

II - Polynôme du second degré

1 - Définition

Définition : On appelle **polynôme du second degré** la fonction : $(a \neq 0)$

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

2 - Forme canonique

Propriété : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré avec $a \neq 0$.
On appelle **forme canonique** de P :

$$P(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

Avec Δ le **discriminant** de P :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

3 - Equations du second degré

Théorème : Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

4 - Signe d'un polynôme du second degré

Théorème : Soit l'équation $P(x)ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta \leqslant 0$, alors $P(x)$ est du signe de a.

- Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2. On suppose que $x_1 < x_2$.
  Si $x \in]-\infty; x_1[U]x_2; +\infty[$, alors $P(x)$ est du signe de a,
  Si $x \in]x_1; x_2[$, alors $P(x)$ est du signe de $-a$,