Probabilités

I - Probabilités sur un ensemble fini

1 - Ensembles

Ensembles : Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.

– L'ensemble $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E commun à A et B.

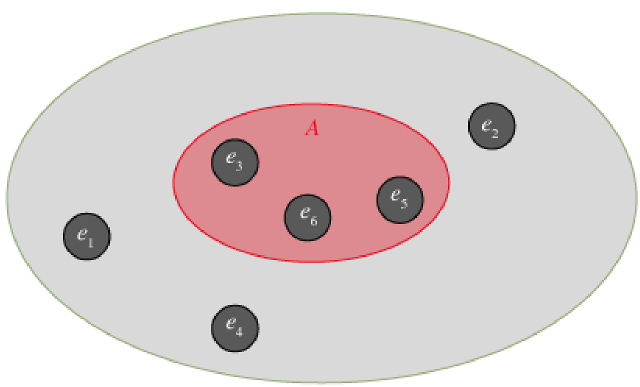
– L'ensemble $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent soit à A soit à B.

– L'ensemble $\bar{A}$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartient pas à A.

– $Card(A)$ est le nombre d'éléments de A.

2 - Évènements

Evénements : Un événement est un ensemble d'éventualités.

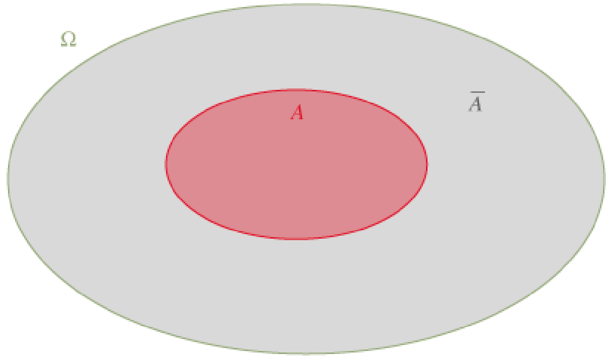


3 - Évènements contraire

Evénement contraire : On appelle événement contraire de l'événement A, noté $\bar{A}$, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A.

La probabilité de l'**événement contraire** de A est égale à :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

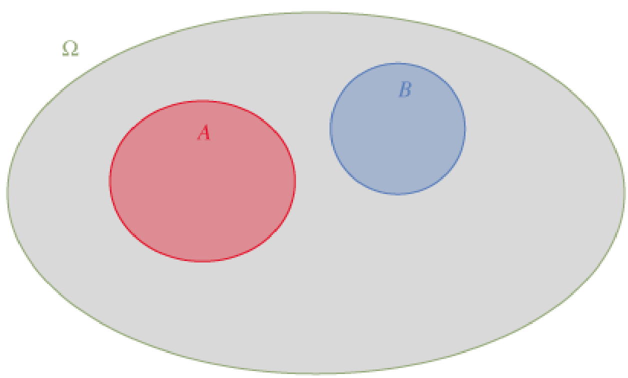


4 - Évènements incompatibles

Evénements incompatibles : Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire simultanément.

Soient A et B deux événements incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



5 - Propriétés des probabilités

Propriétés des probabilité :
- La probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- $p(\varnothing) = 0$.
- $p(\Omega) = 1$.
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

II - Analyse combinatoire

1 - Combinaisons et coefficients binomiaux

Combinaisons et coefficients binomiaux : Soient un ensemble E de cardinal n (toujours naturel) et p un entier naturel inférieur ou égal à n.

Le nombre de parties de E possédant p éléments, appelées **combinaisons de p éléments**, est égal au **coefficient binomial** noté :

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$$

Propriétés et formules des coefficients binomiaux : Soient n un entier naturel non nul et p un entier naturel inférieur ou égal à n. On a alors les propriétés suivantes :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

2 - Triangle de Pascal

Formule de Pascal : Soient n un entier naturel non nul et p un entier naturel strictement inférieur à n.

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

n/p	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
...	...	...	...	...	...	...

III - Variables aléatoires

1 - Définition d'une variable aléatoire

Variable aléatoire : Une **variable aléatoire** réelle est une fonction qui associe un réel à chaque événement de l'univers d'une expérience aléatoire.

2 - Loi de probabilité

Loi de probabilité : Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs :

$$X(\Omega) = x_1; x_2; ...; x_n$$

La loi de probabilité de X associe à chaque réel x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

3 - Espérance

Espérance : L'**espérance** d'une variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Propriété de l'espérance : Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

4 - Variance

Variance : La **variance** d'une variable aléatoire X est le réel :

$$V(X) = \sum_{i=0}^{n} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)$$

Propriété de la variance : Pour tous réels a et b :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

5 - Ecart-type

Ecart-type : L'**écart-type** d'une variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

IV - Loi de Bernouilli

Loi de Bernouilli : Soit un réel p compris entre 0 et 1.

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles :
- **succès**, de probabilité p,
- **échec**, de probabilité $1 - p$,

Une variable aléatoire suit la **loi de Bernouilli de paramètre** p si :
- $X(\Omega) = \{0; 1\}$,
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

Théorème : Si X suit la loi de Bernouilli de paramètre p, on a alors :

- $E(X) = p$,
- $V(X) = p(1-p)$,

V - Loi binomiale

Loi binomiale : Soit un réel p compris entre 0 et 1 et n un entier naturel non nul.

Le **nombre de succès** dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Une variable aléatoire suit ainsi la **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $B(n;p)$, si :
- $X(\Omega) = [|0;n|]$,
- $\forall k \in [|0;n|]$:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le nombre de possibilités de placer les k succès parmi les n répétitions est égal au coefficient :

$$\binom{n}{k}$$

Théorème : Si X suit la loi de binomiale de paramètres n et p, on a alors :

- $E(X) = np$,
- $V(X) = np(1-p)$,