Produit scalaire

www.mathsbook.fr

I - Définitions

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un **réel**, que l'on note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, défini par :
– Si $\overrightarrow{u} \neq 0$ et $\overrightarrow{v} \neq 0$:

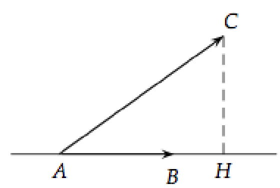
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont nuls :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Propriété : Soient A, B et C trois points distincts du pal, et H le projeté orthogonal de C sur (AB).



– Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

– Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

II - Propriétés du produit scalaire

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées (x', y') dans la base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Propriétés : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et λ un réel.
On a les relation suivantes :
– Commutativité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$$

– Distribution :

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$

– Multiplication par un réel :

$$\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$$

Identités remarquables : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On a les relations suivantes :

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$$

$$(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$$

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$$

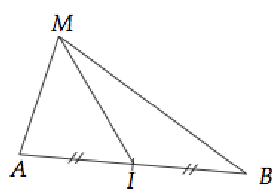
$$||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$

$$||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$

III - Applications

1 - Théorème de la médiane

Théorème de la médiane : Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.



Pour tout point M du plan, on a les relations suivantes :

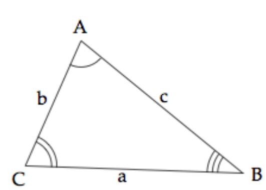
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$$

2 - Thorème d'Al Kashi

Théorème D'Al Kashi : Soit un triangle ABC avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.



On a les relations suivantes :

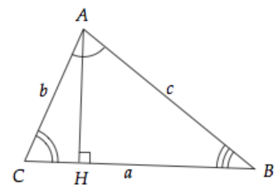
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\widehat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$$

3 - Formule des sinus

Formule des sinus : Soit un triangle ABC d'aire $\mathcal{A}$ avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.



On a les relations suivantes :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$$

4 - Equations

Propriété équations :

– La droite orthogonale à $\overrightarrow{n}$ passant par A est :

$$\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0\}$$

– Le cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0\}$$