Suites numériques

www.mathsbook.fr

I - Définition suite numérique

Définition : Soient $a \in \mathbb{N}$ et $I_a = \{n \in \mathbb{N}, n \geqslant a\}$, I_a est en fait l'ensemble des entiers naturels à partir de a.
On appelle **suite numérique** la fonction u de I_a dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} I_a & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{cases}$$

Notation : On notera $u(0)$ u_0, $u(1)$ u_1, etc.
u_n s'appelle **terme** de la suite numérique.

II - Modes de définitions d'une suite numérique

1 - Mode explicite

Mode explicite : Le terme général de la suite est exprimé en fonction de n :

$$u_n = f(n)$$

2 - Mode récurrent

Mode récurrent : Une suite numérique est définie par la donnée de son premier terme et d'un procédé qui permet de déterminer les suivants.

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ u_0 & & \end{cases}$$

III - Suite arithmétique

Définition : On appelle **suite arithmétique** de premier terme u_0 et de **raison** r la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + r \\ u_0 & & \end{cases}$$

Propriétés :
- Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

- Si u est une suite arithmétique, alors pour tout $n \geqslant p$,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Propriété : Soit u une suite arithmétique.
La somme des termes de cette suite est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

IV - Suite géométrique

Définition : On appelle **suite géométrique** de premier terme u_0 et de **raison** q la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & qu_n \\ u_0 & & \end{array}\right.$$

Propriétés :
- Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors :

$$u_n = u_0 q^n$$

- Si u est une suite géométrique, alors pour tout $n \geqslant p$,

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Propriété : Soit u une suite géométrique.
La somme des termes de cette suite est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

V - Propriétés d'une suite

1 - Variations

Définitions : Soit u_n une suite numérique.

- La suite (u_n) est dite **croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **strictement croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **décroissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **stationnaire** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$$

2 - Extremum

Définitions : Soit u_n une suite numérique.

- La suite (u_n) est **majorée** si :

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$

  M est appelé le **majorant**.

- La suite (u_n) est **minorée** si :

$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$

  m est appelé le **minorant**.

- Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.