Calcul intégral

www.mathsbook.fr

I - Définitions

1 - Intégrale

Définition : Soit f une fonction continue et positive. On considère la courbe $\mathcal{C}$ de f dans un repère.
On appelle **intégrale de** a **à** b, l'aire du domaine situé sous la courbe, entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.
On la note :

$$\int_a^b f(x)dx$$

2 - Convention

Convention : Si f est continue et négative sur $[a;b]$, alors l'intégrale de a à b est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe, entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses, auquel on affecte un signe moins. On parlera alors d'**aire algébrique**.
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors l'intégrale de a à b est égale à la somme des aires algébriques définies sur les intervalles où $f(x)$ garde un signe constant.

3 - Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue, définie sur un intervalle $[a;b]$.
La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a;b]$ est égale à :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

II - Propriétés

Propriétés :

- **Linéarité** : ($\lambda \in \mathbb{R}$)
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

- **Positivité** : Si pour tout $x \in [a;b]$,
$$f(x) \leqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leqslant 0$$
$$f(x) \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

- **Ordre** : Si pour tout $x \in [a;b]$,
$$f(x) \leqslant g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

- **Relation de Chasles** : Pour tout $x \in [a;b]$,
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- **Inégalité de la moyenne** : Soient m et M deux nombres réels tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :
$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M$$

III - Application

Aire du domaine compris entre deux courbes : Soient f et g deux fonctions continues et positives, de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ telles que $f(x) > g(x)$ (f au dessus de g). L'aire du domaine compris entre ces deux courbes, sur $[a;b]$, est :
$$\int_a^b (f-g)(x)dx$$

IV - Intégrales et primitives

Théorème : Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I. On a :
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$