# Continuité et limites

**www.mathsbook.fr**

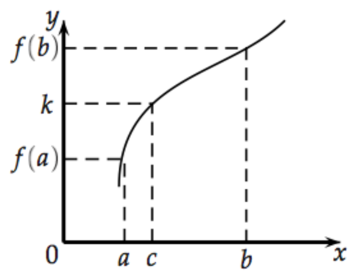
## I - Continuité

**Définition** : Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un élément de cet intervalle $I$.
On dit que $f$ est **continue** en un point $a$ si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

**Théorème** : Toute fonction construite par composition ou opération à partir de fonctions polynômes est continue.

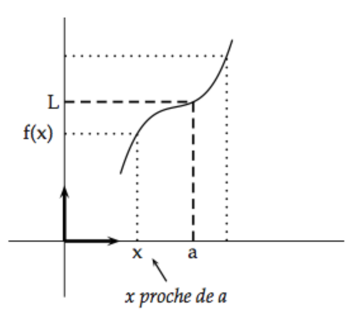
**Théorème des valeurs intermédiaires** : Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.
Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.




## II - Limite d'une fonction en un point $a$

**Définition** : On dit que $f$ tend vers L quand $x$ tend vers $a$ si la distance de $f(x)$ à L peut être rendu aussi petite que l'on veut dés lors que $x$ est suffisamment proche de $a$.
Ceci se note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



**Propriétés** :

- Si $n \in \mathbb{N}*$,
$$\lim_{x\to\ +\infty} x^n = +\infty$$
- Si $n$ est pair,
$$\lim_{x\to\ -\infty} x^n = +\infty$$
- Si $n$ est impair,
$$\lim_{x\to\ -\infty} x^n = -\infty$$
-
$$\lim_{x\to\ +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
-
$$\lim_{x\to\ -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
-
$$\lim_{x\to\ +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$
-
$$\lim_{x\to\ +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$
-
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
-
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

## III - Opérations sur les limites

**Somme des limites** :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to\ a} f(x)$ | $L$ | $L$ ou $+\infty$ | $L$ ou $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{x\to\ a} g(x)$ | $L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to\ a} (f+g)(x)$ | $L+L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | INDETERMINE |

**Produit des limites** :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to\ a} f(x)$ | $L$ | $L>0$ ou $+\infty$ | $L>0$ ou $+\infty$ | $L<0$ ou $-\infty$ | $L<0$ ou $-\infty$ | $0$ |
| $\lim_{x\to\ a} g(x)$ | $L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim_{x\to\ a} (f\times g)(x)$ | $L\times L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | INDETERMINE |

**Quotient d'une limite** :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to\ a} f(x)$ | $L$ | $L=0$ ou $f(x)>0$ | $L=0$ ou $f(x)<0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim_{x\to\ a} \frac{1}{f(x)}$ | $\frac{1}{L}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |

**Quotient des limites** : Pour déterminer la limite de $\frac{f}{g}$, il suffit de déterminer la limite de $\frac{1}{g}$ puis de déterminer la limite du produit de $f$ par $\frac{1}{g}$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to\ a} f(x)$ | $L$ | $L$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | $0$ |
| $\lim_{x\to\ a} g(x)$ | $L'\neq 0$ | $\pm\infty$ | $L'>0$ | $L'<0$ | $L'>0$ | $L'<0$ | $\pm\infty$ | $0$ |
| $\lim_{x\to\ a} (\frac{f}{g})(x)$ | $\frac{L}{L'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | INDETERMINE | INDETERMINE |

## IV - Fraction rationnelle polynomiale au voisinage de l'infini

**Propriétés** : Soit $P$ un polynôme.

– La limite de ce polynôme $P$ en $+\infty$ **ou** $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

– La limite d'une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des fonction polynômes en $+\infty$ **ou** $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

## V - Limite d'une fonction composée

**Définition** : Soient $f$ une fonction définie sur $I$ et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.
La fonction $g \circ f$ (on dit "$g$ rond $f$")est la fonction définie aussi sur le domaine $I$ par :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

**Théorème** : Soient $f$ une fonction définie sur $I$, $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$, $a$ un élément de $I$ (borne comprise), $L$ et $L'$ deux réels ou $\pm\infty$.
Si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{X \to L} g(X) = L'$$

Alors :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = L'$$

## VI - Encadrement de fonctions

**Théorème** : Soient $b$ un réel, $u$ et $v$ deux fonctions telles que :

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} v(x) = 0$$

Si, pour tout $x \in ]b, +\infty[$, $u(x) \leqslant f(x) - L \leqslant v(x)$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

## VII - Comparaison au voisinage de l'infini

**Théorème de minoration** : Soient $b$ un réel, $f$ et $g$ deux fonctions.
Si, pour tout $x \in ]b, +\infty[$,

$$f(x) \geqslant g(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

**Théorème de majoration** : Soient $b$ un réel, $f$ et $g$ deux fonctions.
Si, pour tout $x \in ]b, +\infty[$,

$$f(x) \leqslant g(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$