

# CONDITIONNEMENT

[www.mathsbook.fr](http://www.mathsbook.fr)

## I - RAPPELS DE PROBABILITÉS

### 1 - ENSEMBLES

**Ensembles** : Soit  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

- L'ensemble  $A \cap B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  commun à  $A$  et  $B$ .
- L'ensemble  $A \cup B$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui appartiennent soit à  $A$  soit à  $B$ .
- L'ensemble  $\bar{A}$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartient pas à  $A$ .
- $Card(A)$  est le nombre d'éléments de  $A$ .

### 2 - VOCABULAIRE DE PROBABILITÉS

**Vocabulaire des probabilités** :

- **Expérience aléatoire ou éventualité** : Une expérience aléatoire ou éventualité est une expérience dont le résultat est l'effet du hasard.
- **Univers** : L'univers est l'ensemble que l'on note  $\Omega$  de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : Un événement est une partie de  $\Omega$ .
- **Événement élémentaire** : Un événement élémentaire est un singleton de  $\Omega$ .
- **Événement contraire** : Un événement contraire d'un événement  $A$ , noté  $\bar{A}$ , est la partie complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ .
- **Événement incompatibles** : Deux événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ .

### 3 - DÉFINITION DE LA PROBABILITÉ

**Probabilité** : Soit un univers  $\Omega$  ayant  $n$  éléments :  $\Omega = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ .

Définir une probabilité sur  $\Omega$  c'est associer à chaque élément  $\{a_i\}$  un réel positif  $p_i$  tels que leur somme vaut 1 :

$$\sum_{k=1}^n p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

On dit alors que la **probabilité** de l'événement élémentaire  $a_i$  est  $p_i$ .

La probabilité d'un événement  $A$  est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans  $A$ .

## 4 - PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉ

### Propriétés des probabilité :

- La probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- $p(\emptyset) = 0$ .
- $p(\Omega) = 1$ .
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .

## II - PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

### 1 - CONDITIONNEMENT

**Conditionnement** : Soient  $A$  et  $B$  deux événements, avec  $A$  de probabilité non nulle.

On définit la **probabilité de  $B$  sachant  $A$**  par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### 2 - INDÉPENDANCE

**Indépendance** : Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

**Théorème de l'indépendance** : Soient  $A$  et  $B$  deux événements de probabilités non nulles.

On a alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A)$$

### 3 - FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

**Partition** : Soit un ensemble  $E$ .

Les événements de probabilités non nulles  $\{E_1; E_2; E_3; \dots; E_n\}$  forment une **partition** de  $E$  si et seulement si :

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, E_i \in E$ ;
- Les événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont deux à deux incompatibles,
- Leur réunion est égale à l'ensemble  $E$ .

**Formule des probabilités totales** : Soit  $(A_1; A_2; \dots; A_n)$  une partition de  $\Omega$ .

Alors, pour tout événement  $B$  de  $\Omega$ , on aura :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

## III - VARIABLES ALÉATOIRES

### 1 - DÉFINITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

**Variable aléatoire** : Une **variable aléatoire** réelle est une fonction qui associe un réel à chaque événement de l'univers d'une expérience aléatoire.

## 2 - LOI DE PROBABILITÉ

**Loi de probabilité** : Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs :

$$X(\Omega) = x_1; x_2; \dots; x_n$$

La loi de probabilité de  $X$  associe à chaque réel  $x_i$  la probabilité  $P(X = x_i)$ .

## 3 - ESPÉRANCE

**Espérance** : L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=0}^n x_i P(X = x_i)$$

**Propriété de l'espérance** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

## 4 - VARIANCE

**Variance** : La variance d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$V(X) = \sum_{i=0}^n [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)$$

**Propriété de la variance** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

## 5 - ÉCART-TYPE

**Écart-type** : L'écart-type d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

## IV - LOI DE BERNOULLI

**Loi de Bernoulli** : Soit un réel  $p$  compris entre 0 et 1.

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles :

- **succès**, de probabilité  $p$ ,
- **échec**, de probabilité  $1 - p$ ,

Une variable aléatoire suit la **loi de Bernoulli de paramètre  $p$**  si :

- $X(\Omega) = \{0; 1\}$ ,
- $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ .

**Théorème** : Si  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , on a alors :

- $E(X) = p$ ,
- $V(X) = p(1 - p)$ ,

## V - LOI BINOMIALE

**Loi binomiale** : Soit un réel  $p$  compris entre 0 et 1 et  $n$  un entier naturel non nul.

Le **nombre de succès** dans la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

Une variable aléatoire suit ainsi la **loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$** , notée  $B(n; p)$ , si :

- $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ ,
- $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  :

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le nombre de possibilités de placer les  $k$  succès parmi les  $n$  répétitions est égal au coefficient :

$$\binom{n}{k}$$

**Théorème** : Si  $X$  suit la loi de binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , on a alors :

- $E(X) = np$ ,
- $V(X) = np(1-p)$ ,