Fonction logarithme

www.mathsbook.fr

I - Définition

Définition : Pour tout nombre $a > 0$, il existe un unique nombre réel α tel que $e^{\alpha} = a$.
Ce nombre est appelé **logarithme népérien** de a et est noté $\ln a$.
On appelle **fonction logarithme népérien**, la fonction qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe $\ln x$:

$$x \mapsto \ln x$$

On appelle **fonction logarithme décimale** la fonction log qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$:

$$x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

II - Propriétés

Propriétés : Voici un grand nombre de propriétés sur cette fonction logarithme.

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\ln x$ est négatif sur $]0; 1]$ et positif sur $[1; +\infty[$.
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\ln x = \ln y \Longleftrightarrow x = y$$

$$\ln x > \ln y \Longleftrightarrow x > y$$

- La fonction logarithme est continue, donc dérivable, et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$,

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur I, alors :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

- Pour tout $x, y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

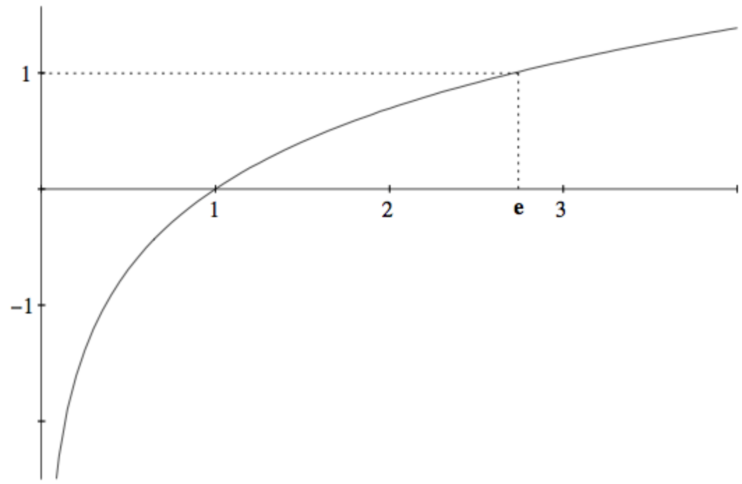
$$\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$$

- Pour tout a réel strictement positif et tout nombre rationnel r :

$$\ln a^r = r \ln a$$

III - Tracé de la fonction

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	



IV - Etude des limites

Propriétés :

–
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
–
$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$
–
$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$
–
$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$$
–
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
–
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$
–
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$