

LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

www.mathsbook.fr

I - LIMITES DE SUITES

1 - CONVERGENCE ET DIVERGENCE DE SUITES

Définitions :

– On dit qu'une suite (u_n) **converge** vers un réel L si pour tout intervalle ouvert U contenant L , tous les termes de la suite appartiennent à U sauf un nombre fini.

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

L est la limite de la suite (u_n) et elle est unique.

– Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Propriété : Une suite (u_n) converge vers L revient à dire que la suite $(u_n - L)$ converge vers 0.

Propriété : Une suite (u_n) croissante non majorée tend vers l'infini.

2 - THÉORÈMES DE COMPARAISON

A - THÉORÈME DES GENDARMES

Théorème des gendarmes : Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques telles que (u_n) et (w_n) convergent vers L .

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors la suite (v_n) converge vers L .

Si à partir d'un certain rang on a $|u_n - L| \leq v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors la suite (u_n) converge vers L .

B - CRITÈRE DE DIVERGENCE

Critère de divergence : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

– Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$,

– Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3 - OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES

Propriétés : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes de limites respectives L et L' .

– La suite $(u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $L + L'$,

– La suite $(u_n v_n)$ est convergente et sa limite est égale à LL' ,

– Si $L' \neq 0$, la suite $\frac{u_n}{v_n}$ est convergente et sa limite est égale à $\frac{L}{L'}$,

4 - LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

Propriétés : Soient f une fonction définie sur $]a; +\infty[$ et $(u_n) = f(n)$ une suite définie à partir de $n > a$.

Si f admet en $+\infty$ une limite finie, ou infinie, alors la suite (u_n) admet la même limite.

5 - CAS DES SUITES GÉOMÉTRIQUES

Théorème : Soit $q \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$ (un réel non nul et différent de 1).

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0,
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$,
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge vers 1,
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

II - LIMITES DE FONCTIONS

1 - LIMITE FINIE EN L'INFINI

Définitions : Soit f une fonction et l un réel.

- La fonction f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

- La fonction f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment petit.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

2 - LIMITE INFINIE EN a

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant l'intervalle $]a; a + \epsilon[$ ou $]a - \epsilon; a[$, avec a un réel et $\epsilon > 0$.

- La fonction f a pour limite $+\infty$ en a si $f(x)$ est très grand dès que x est suffisamment proche de a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

- La fonction f a pour limite $-\infty$ en a si $f(x)$ est très petit dès que x est suffisamment proche de a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

3 - LIMITES DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Définitions :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

- Si n est pair,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

- Si n est impair,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

4 - OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Somme des limites :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	L ou $+\infty$	L ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	INDETERMINE

Produit des limites :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	INDETERMINE

Quotient d'une limite :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L = 0$ ou $f(x) > 0$	$L = 0$ ou $f(x) < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Quotient des limites : Pour déterminer la limite de $\frac{f}{g}$, il suffit de déterminer la limite de $\frac{1}{g}$ puis de déterminer la limite du produit de f par $\frac{1}{g}$.

5 - FONCTION RATIONNELLE POLYNOMIALE AU VOISINAGE DE L'INFINI

Propriétés : Soit P un polynôme.

- La limite de ce polynôme P en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

- La limite d'une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des fonction polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

6 - LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Définition : Soient f une fonction définie sur I et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.

La fonction $g \circ f$ (on dit "g rond f") est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Théorème : Soient f une fonction définie sur I , $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$, a un élément de I (borne comprise), L et L' deux réels ou $\pm\infty$.

Si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\lim_{X \rightarrow L} g(X) = L'$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = L'$$

7 - THÉORÈMES DE COMPARAISON

A - THÉORÈME DES GENDARMES

Théorème des gendarmes : Soient f , g et h trois fonctions telles que :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

Alors, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

B - COMPARAISON AU VOISINAGE DE $+\infty$

Théorème de minoration : Soient b un réel, f et g deux fonctions.

Si, pour tout $x \in]b, +\infty[$,

$$f(x) \geq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Théorème de majoration : Soient b un réel, f et g deux fonctions.

Si, pour tout $x \in]b, +\infty[$,

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

III - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

1 - ASYMPTOTE HORIZONTALE

Définition : Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$.

La droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe \mathcal{C}_f en $\pm\infty$.

2 - ASYMPTOTE VERTICALE

Définition : Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.
La droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe \mathcal{C}_f .

3 - ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition : La droite \mathcal{D} d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** en $\pm\infty$ à la courbe \mathcal{C}_f d'équation $y = f(x)$ lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$