Produit scalaire dans l'espace

www.mathsbook.fr

I - Rappels de première - Produit scalaire dans le plan

1 - Définitions

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un **réel**, que l'on note $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :
– Si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$:

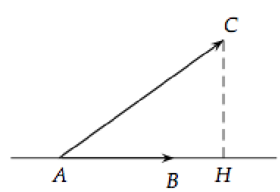
$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nuls :

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété : Soient A, B et C trois points distincts du pal, et H le projeté orthogonal de C sur (AB).



– Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

– Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

2 - Propriétés du produit scalaire

Propriété : Soient $\vec{u}$ de coordonnées (x,y) et $\vec{v}$ de coordonnées (x',y') dans la base orthonormale $(\vec{i},\vec{j})$.
Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Propriétés : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et λ un réel.
On a les relation suivantes :
– Commutativité du produit scalaire :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$

– Distribution :

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

– Multiplication par un réel :

$$\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$$

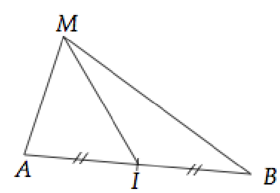
Identités remarquables : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On a les relations suivantes :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$
$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$$
$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$$

3 - Applications

a - Théorème de la médiane

Théorème de la médiane : Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.

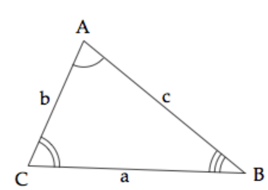


Pour tout point M du plan, on a les relations suivantes :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$
$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$$

b - Thorème d'Al Kashi

Théorème D'Al Kashi : Soit un triangle ABC avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

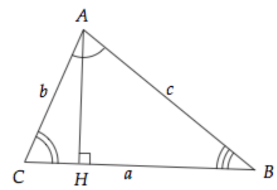


On a les relations suivantes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\widehat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$$

c - Formule des sinus

Formule des sinus : Soit un triangle ABC d'aire $\mathcal{A}$ avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.



On a les relations suivantes :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$$

d - Distance d'un point à une droite

Propriété : Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec a et b non nuls, et $A(x_A; y_A)$ un point du plan.
La distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est la distance AH, avec H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
On a :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e - Equations

Propriété équations :
- La droite orthogonale à $\overrightarrow{n}$ passant par A est :

$$\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0\}$$

- Le cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0\}$$

II - Produit scalaire dans l'espace

1 - Définitions

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace n'est rien d'autre que le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan contenant ces deux vecteurs.

Définition : Soient $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace.
On a alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

2 - Propriétés

3 - Orthogonalité

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Soit un vecteur $\overrightarrow{n}$ de l'espace et un point A.
L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est un plan passant par A et de vecteurs normal $\overrightarrow{n}$.

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont perpendiculaires si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 0$.

4 - Applications

a - Equation cartésienne

Définition : Tout plan de l'espace, de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, toute équations de la forme $ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan de l'espace de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.

b - Distance d'un point à un plan

Propriété : Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace.
La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est la distance AH, avec H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.
On a :

$$AH = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$